This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

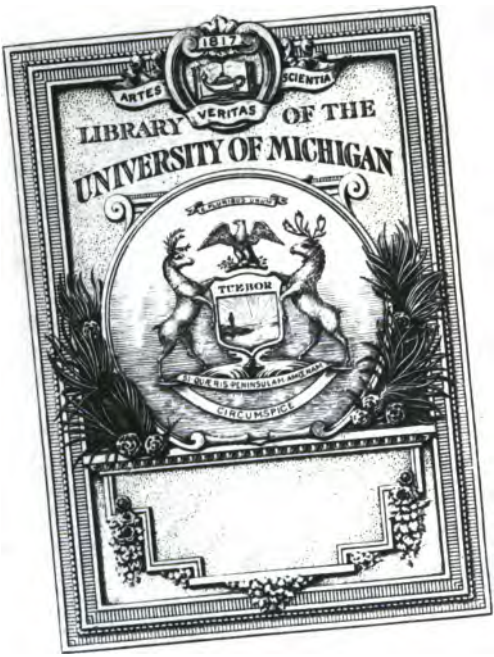
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

20 - 50113


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Géométrie, ouvrage destiné spécialement aux soldats; par le Pnant cel prussien de Tempelhof.

Berlin — 1790.

QA
35
T28

Geometrie

für

Soldaten

und

die es nicht sind.

von

G. F. v. Tempelhof,

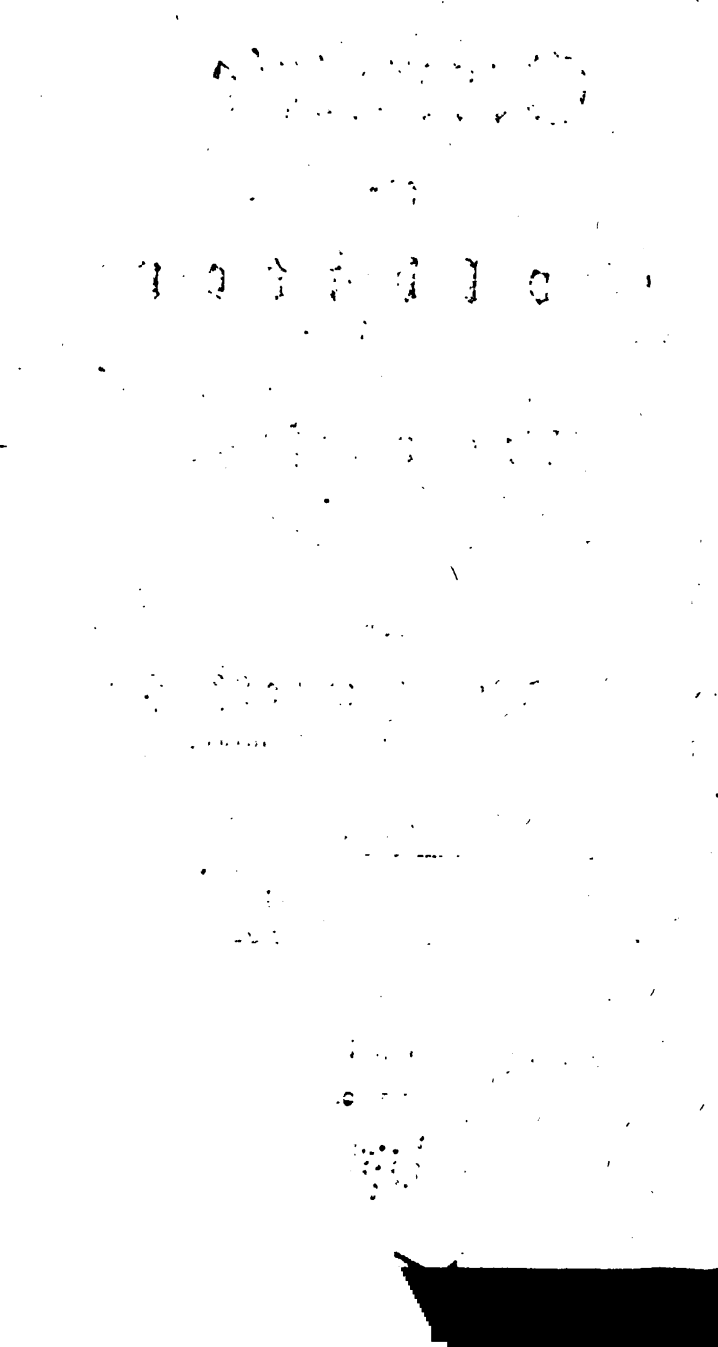
Königl. Preußischem Obristlieutenant.

Mit 30 Kupfertafeln.

Berlin.

Bei Johann Friedrich Unger.

1790.



11-21-35
31035

Vorrede.

Daß die Geometrie dem Offizier, der sich zu einer gewissen militärischen Höhe emporschwingen will, vorzüglich nützlich ist, bestreitet niemand. Daher werde ich wohl nicht nöthig haben in einer langen Vorrede, die überhaupt nicht nach meinem Geschmacke ist, weitläuftig den Nutzen derselben zu zeigen und die Ursachen anzugeben, welche mich bewogen haben, die Anzahl der Elementarwerke zu vermehren. Nur über die Eintheilung in Stunden will ich mich erklären. Ich wählte sie, um Anfängern einigermaßen begreiflich zu machen, daß die Erlernung der Geometrie kein Menschenalter erfordere, und um ihnen gewisse Ruhepunkte zu verschaffen. Dies muntert auf, wie ich glaube: und dies war meine Absicht. Die Erfahrung wird zeigen, ob ich mich geirrt habe.

4-15-40 Mag

Dieser erste Theil erhält übrigens nur die sechs ersten Bücher des Euclides

des, und ist für den Offizier überhaupt bestimmt. In dem zweiten Theile werde ich die Lehre von den Flächen und Körpern abhandeln, und ihn besonders für Artilleristen und Ingenieure einrichten; allein bei diesen unruhigen Zeiten wird er nicht eher als — wenn ich noch lebe — erscheinen.

Berlin, den 14. April 1790.

G. F. v. Tempelhof.

Anfangsgründe der ebenen Geometrie.

Erste Stunde.

Die gerade Linie.

§. 1.

Es ist nicht schwer, sich eine gerade Linie vorzustellen. Wir gewöhnen uns schon sehr frühzeitig, in Gedanken von unserm Auge nach jedem Gegenstande, den wir vor uns sehen, eine gerade Linie zu ziehn. Wenn wir eine Reihe Bäume vor uns sehen, und einer den andern dergestalt bedeckt, daß wir nur Einen zu sehen glauben; so sagen wir, sie liegen in einer geraden Linie, und eben so urtheilen wir, wenn dieses bei andern Gegenständen Statt findet.

§. 2. Wenn wir dabei etwas genauer nachsehen, so begreifen wir leicht, daß die Bäume nicht die gerade Linie selbst sind, eben so wenig als andre

Gegenstände, die uns in einer geraden Linie erscheinen. Wir stellen uns die **gerade Linie** als etwas davon ganz **verschiedenes** vor, als eine Sache, die blos in unsern Gedanken da ist, und bei der wir gar nicht nöthig haben, eine **Breite** oder **Dicke** zu denken, welches doch bei allen andern Dingen in der Natur geschehen muß. Unser Urtheil von dem **Geradesein** gründet sich bloß auf die Lage der Punkte, die wir uns in einer Linie vorstellen. Ist diese so beschaffen, daß, wenn man das Auge bei dem ersten A anlegt, alle übrigen B, C, D ꝛc. zusammen von dem ersten bedeckt werden, und nur als ein Punkt erscheinen; so liegen sie in einer **geraden Linie**.

Fig. 1.

§. 3. Nach diesen Begriffen verfahren wir, **wenn wir auf dem Felde eine gerade Linie ziehen oder abstecken sollen.** Mehrerer Genauigkeit wegen bedient man sich dabei einiger Stäbe, die so viel als möglich **gerade** und von einerlei **Dicke** sein müssen; doch ist dies nur eine Nebensache, und in den meisten Fällen nimmt man sie so gut, als sie zu bekommen sind. Man setzt alsdenn in A und B einen Stab, geht nach einem Punkt C und setzt daselbst einen neuen Stab, dergestalt, daß wenn man nach A und B sieht, der Stab C diese bedeckt. Man verfährt eben so bei D und so weiter, bis man an den Punkt gekommen ist, wo die Linie aufhören soll. Ist man denn bei dieser Arbeit aufmerksam zu Werke gegangen, so muß der Stab D alle übrigen bede-

Fig. 2.

den, wenn man sich in O dergestalt stellt, daß man sie gerade vor sich sieht.

§. 4. Von jedem Punkt A kann man nach allen Seiten so viele gerade Linien AB, AC, AD, AE ꝛc. ziehen, als man will, und man mag sich hinstellen wo man will, so ist man mit A in gerader Linie. Wenn aber auf dem Felde oder sonst irgendwo zwei Punkte A und B gegeben oder festgesetzt werden, so ist man nicht überall mit diesen in einer geraden Linie; sondern nur in den Punkten C, D ꝛc. wo der Punkt oder Gegenstand B den bei A zu bedecken scheint. Es steht uns in diesem Falle also nicht mehr frei, wo wir uns hinstellen wollen, um mit A und B in gerader Linie zu sein, sondern dies kann nur in einigen Punkten geschehen. Fig. 3. Fig. 4.

Die Lage einer geraden Linie wird also durch zwei Punkte völlig bestimmt, und es fällt offenbar in die Augen, daß nicht mehr als Eine gerade Linie durch die beiden Punkte A und B oder überhaupt durch zwei Punkte gezogen werden kann. Alle übrigen würden auf eben diese gerade Linie fallen, und mit derselben im Grunde einerlei sein.

§. 5. Das **Richten eines Gliedes, eines Bataillons, eines Regiments** und überhaupt eines ganzen Treffens, hängt bloß von einer geschickten Anwendung dieser ganz einfachen Grundsätze ab. **Denn Richten heißt nichts anders, als die Leute so stellen, daß eine gerade Linie, die**

man in Gedanken von einem Flügel bis zum andern ziehen kann, durch jeden Mann geht. Da indessen nicht alle von einerlei körperlichen Beschaffenheit sind, so muß man dabei Etwas festsetzen, daß sich in einer geraden Linie befinden soll; z. B. die Schultern. Alsdenn würde ein Bataillon gut gerichtet sein, wenn alle Schultern vom rechten bis zum linken Flügel einander bedeckten. Auch würde ein Bataillon gut gerichtet sein, wenn jeder Mann die gerade Linie, welche vom rechten bis zum linken Flügel gezogen werden kann, mit der Brust berührte.

§. 6. Um also ein Bataillon gut zu richten, ist es nothwendig, zwei Punkte festzusetzen, durch welche die gerade Linie gehen soll, in der man es richten will. Gesetzt, dieses wären die Punkte A und B; so bringt man erstlich einen Flügel, z. B. den rechten Flügelmann, in diese gerade Linie, und stellt sich alsdenn zwischen A und C dergestalt in E, daß man den Punkt B vor sich sieht. Alsdenn wird man leicht sehen, ob das Bataillon CD in der Linie AB steht, oder nicht, und ob es vor oder zurück muß. Billig muß man niemals eher den Punkt E verlassen, als bis man sieht, daß sich das Bataillon in die gerade Linie gestellt hat; denn sobald man von E nach B herunter geht oder reitet, verliert man den Punkt C, und hat nur Einen B vor sich, der aber allein nicht hinreichend ist, die wahre Linie zu bestimmen (§. 4.) Daher geschieht es nicht selten, daß nach Fig. 5.

dem

dem Richten doch im Innern des Bataillons noch einige Leute vor, oder zurück stehen und überhaupt die Stellung nicht in der Linie AB ist, in der sie doch sein sollte.

§ 7. Wenn man zwei Punkte oder Gegenstände A und B vor sich hat, die man sehen kann; so ist es gar nicht schwer, sich mit ihnen in eine gerade Linie zu stellen, und sich von C nach D und weiter fort zu bewegen, ohne aus dieser geraden Linie zu kommen, und wenn man ja seitwärts abgewichen ist, diesem Fehler gleich wieder abzuhelfen. Ganz anders aber verhält es sich, wenn man sich zwischen diesen beiden Punkten befindet. Alsdenn ist es sehr leicht, beim Weitervorgehn nach B zu aus dieser Linie zu kommen; denn wenn man seitwärts bei D abweicht, so wird man doch immer glauben, in der geraden Linie AB zu sein, weil man mit dem Punkt B überall in gerader Linie ist, und den Punkt A, der die Lage dieser geraden Linie bestimmt, nicht sehen kann, wenn man die Augen auf B hat. Und ist dies einmal geschehen, so ist es ein Glück, wenn man für sich allein die wahre Linie AB wieder findet. Das Umsehen ist dabei fast von gar keinem Nutzen: denn mit dem Punkt A ist man immer in einer geraden Linie. Die Abweichung muß schon sehr merklich sein, wenn man sehen soll, daß man nicht mehr in der geraden Linie AB ist.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8. §. 8. Um also ein Bataillon CD recht gerade zu richten, muß man außerhalb des Flügels, nach welchem man hinunter richten will, zwei Punkte A und B entweder wirklich festsetzen, oder sich doch in Gedanken vorstellen; demnach, wenn man vom rechten nach dem linken Flügel hinunter richten will, außerhalb des linken, und wenn man vom linken nach dem rechten hinauf richten will, außerhalb des rechten Flügels. Denn da man alsdenn die Punkte, welche die Richtung bestimmen (§. 4.) beständig vor Augen hat, so entdeckt man jede Abweichung im Bataillon, und kann sie verbessern, ohne zu befürchten, aus der geraden Linie zu kommen, in der das Bataillon stehen soll.

§. 9. Wenn ein Bataillon oder eine Kolonne in der Linie AB aufmarschiren soll, und die Richtungspunkte (Points d'Allignement) gegeben sind; so hat dies keine Schwierigkeit, wenn der Offizier, der den ersten Zug führt, die beiden Punkte A und B vor sich hat. Wenn aber der Fig. 9. Punkt A vor ihm, B hingegen hinter ihm liegt; so ist es um eine Kleinigkeit zu thun, und die Richtung wird dergestalt verloren, daß es hernach viele Mühe macht, die Kolonne wieder in die wahre Linie zu bringen. Die Punkte, zwischen welchen eine Kolonne aufmarschiren soll, sind aber gemeiniglich weit entfernte Gegenstände und das Terrain erlaubt es nicht allemal, in der Geschwindigkeit noch einen dritten zu finden, der mit den gegebenen in

einer

einer geraden Linie liegt. Daher ist der Offizier, welcher den ersten Zug führt, und auf den bei dem Aufmarsch alles ankömmt, bei der größten Aufmerksamkeit, die er anwendet, doch alle Augenblicke der Gefahr ausgesetzt, die Richtung zu verlieren. Man muß ihm daher noch einen oder mehrere Punkte in der Linie AB zu verschaffen suchen, und dies kann ohne viele Weitläuftigkeit geschehen.

Ich will annehmen: die Kolonne sei rechts abmarschirt und solle zwischen den Richtungspunkten A und B aufmarschiren. Nachdem der Punkt, wo sich die Züge herumschwenken, festgesetzt worden, setzt der General zwei Adjutanten C und D in die gerade Linie AB, dergestalt, daß der Officier beim ersten Zuge sie sehen kann; so wird dieser ohne Mühe in der Linie bleiben. Der Offizier, welcher den zweiten Zug führt, hat nunmehr den Offizier beim ersten Zuge und den Adjutanten C vor sich, und kann also auch nicht aus der Linie kommen. Der Offizier beim dritten Zuge hat gar nicht mehr nöthig, auf den Adjutanten zu sehen; sein Marsch wird durch die Offiziere auf dem linken Flügel des ersten und zweiten Zuges völlig bestimmt, wenn er nur immer so marschirt, daß er mit beiden in einer geraden Linie bleibe; und eben so haben die Officiere der folgenden Züge zwei Punkte vor sich, nach den sie sich richten können.

Wenn der Adjutant C siehe, daß der erste Zug ihm nahe ist; so reitet er fort und stellt sich in C' zwischen den Adjutanten D und den Punkt A, und der Adjutant D richtet ihn mit A in eine gerade Linie, oder wenn er den Punkt B und C' sehen kann, so richtet er sich selbst mit dem Adjutanten D. Beide bleiben nun unbeweglich so lange stehen, bis der erste Zug bald an den Adjutanten D ist; alsdenn reitet dieser wieder fort, stellt sich in D', und wird von dem Adjutanten in C' wieder mit A in eine gerade Linie gerichtet, oder er richtet sich selbst mit dem zweiten Richtungspunkt B auf dem linken Flügel und dem Adjutanten C. Auf diese Art wechseln beide so lange ab, bis Halt! kommandirt wird und die Linie einschwenkt.

§. 10. Auf diese Art wird der Marsch des ersten Zuges und dadurch auch der ganzen Kolonne genau bestimmt; und wenn auch während des Fortreitens des Adjutanten ein kleiner Fehler begangen wird, so ist diesem doch leicht abgeholfen, sobald er wieder auf seinem Posten ist. Was übrigens hier beim Rechtsabmarschiren gilt, findet auch Statt, wenn eine Kolonne links abmarschirt ist. Wenn Halt! kommandirt und eingeschwenkt wird, müssen die Adjutanten, oder doch wenigstens einer, so lange stehen bleiben, bis die Kommandeure ihre Bataillone, die Generale ihre Brigaden und der kommandirende General die ganze Linie gerichtet haben; besonders aber so lange, bis der Kommandeur des ersten Bataillons dasselbe gerichtet

tet hat; denn dieses bestimmt die Richtung der übrigen. Man sieht hieraus auch, daß es gut sein würde, wenn die Kommandeure beim Rechtsabmarschiren und Linkseinschwenken, ihre Bataillone vom linken nach dem rechten, und beim Linksabmarschiren und Rechtseinschwenken vom rechten nach dem linken Flügel hinauf richteten; weil sie alsdenn die Punkte, welche die Richtung des Bataillons bestimmen, vor Augen hätten.

§. 11. Es ist bereits bemerkt worden, daß man sich leicht mit zweien Punkten in eine gerade Linie stellen kann, wenn man sie gerade vor sich sieht, und so lange fortgehen kann, bis man gewahr wird, daß einer den andern bedeckt. Fig. 10. Wenn man sich aber zwischen beide, und doch mit ihnen in gerader Linie stellen soll, so ist dies nicht so leicht, als man vielleicht glaubt. Wenn jemand allein ist, so macht dies unendliche Schwierigkeiten, und doch kommt dieser Fall häufig vor, z. B. wenn eine Kolonne zwischen die Richtungspunkte (Points d'Allignement) einrücken soll, wenn man beim Aufnehmen einer Gegend sich mit zweien weit entfernten Thürmen in gerade Linie setzen will ꝛc. Wenn aber zwei Personen zu Fuß oder zu Pferde einander recht verstehen, so ist die Sache bald gemacht.

Ich will annehmen, A und B wären die beiden Gegenstände, mit denen man sich in eine gerade Linie setzen soll; C und D mögen diese Personen sein; so stellen sie sich zuerst in eine nicht zu

kleine Entfernung von einander, und D richtet C mit einem von den beiden Punkten, z. B. mit B in eine gerade Linie. Wenn dies geschehen ist, so bewegen sie sich vorwärts, und D giebt dabei genau Acht, daß er mit B und C beständig während des Vorrückens in einer geraden Linie bleibt. C aber hat die Augen auf D, und so rücken sie so lange bis C′, D′ und weiter vor, bis endlich C gewahr wird, daß D gerade auf den Gegenstand oder Punkt A trift oder mit ihm in gerader Linie ist. Alsdenn ruft C Halt! und wenn dies geschieht, nachdem C in C″ und D in D″ gekommen: so sind C″ und D″ mit A und B in einer geraden Linie.

Dieses begreift man leicht. D ist nach der Voraussetzung mit B und C beständig in einer geraden Linie. Wenn also D in D″ kommt, so ist er ebenfalls mit C und B in einer geraden Linie, und die Linie, welche durch D″ und C″ geht, geht auch durch B. Indem aber D in D″ kommt, sieht C, daß er auch mit A in gerader Linie ist; also geht die Linie, welche durch C″ und D″ geht, auch durch A. Daher geht diese Linie durch die beiden Punkte A und B, und die vier Punkte A, D″, C″ und B sind in einer geraden Linie.

§. 12. Auf diese Art können zwei Adjutanten leicht die Punkte finden, auf welche die Kolonnen zu marschiren müssen, wenn sie zwischen den Richtungspunkten A und B aufmarschiren sollen. Die Sache ist an und für sich sehr leicht, doch ist es gut,

wenn

wenn man sich öfters darin übt; denn dadurch erlangt man eine desto größere Fertigkeit. Die Hauptsache dabei ist, daß ein jeder auf den andern genau Acht giebt, D mit C und B beständig in einer Linie bleibt, und beide auf das Wort Halt! stille stehen. Geschieht dies nicht, so muß man die Arbeit noch einmal vornehmen. Da beide übrigens eine Art von Bogen beschreiben, so muß der innere C nicht zu starke Schritte nehmen, weil sonst D eher laufen als gehen müßte.

Zweite Stunde.

Grundsätze.

§. 13.

Diese wenigen Beispiele, deren ich leicht noch mehrere anführen könnte, zeigen schon, daß die Untersuchungen der Geometer kein bloßer Zeitvertreib, oder, nach der Meinung einiger seichten Köpfe, Grillenfängereien sind. Wer gewohnt ist zu denken, wird bei jedem Satz in der Geometrie Unterhaltung genug finden; wenn er sich nur die Mühe nehmen will, ihn zu zergliedern, und eine Anwendung davon auf verschiedene Fälle zu machen, wie es hier bei der geraden Linie geschehen ist. Man klagt über das Trockne, das Langweilige in den Schriften der Geometer, und stellt sich dabei Schwierigkeiten vor, die man übersteigen zu können zweifelt. Freilich ist die Geometrie kein Roman oder eine Wissenschaft die man im Pudermantel lernen kann; allein so schwer ist sie auch nicht, als man sich gemeiniglich einbildet. Da der Geometer nicht verführen, sondern überzeugen will; da er will, daß man von dem, was er vorträgt, eben so überzeugt sein soll, als von seinem eigenen Dasein: so legt er uns seine Gedanken in der größten Einfalt und ohne allen Schmuck der Beredsamkeit vor, und erspart uns dadurch die Mühe, diesen Flitterstaat wegzuräumen, um die Wahrheit in ihrer

ser natürlichen Gestalt zu sehen. Dadurch verliert nun freilich sein Vortrag das Einschmeichelnde, das Amüsirende, wodurch wir öfters verführet werden, zu glauben, wir wissen viel, wenn wir am Ende zu unserm größten Leidwesen einsehen, daß wir nichts wissen, und unser Kopf einem egyptischen Tempel gleicht, dessen Außenseite zwar schön, inwendig aber mit lächerlichen Gottheiten, Affen und Meerkatzen, angefüllt ist.

§. 14. Wenn man übrigens den Weg betrachtet, den der Geometer nimmt, so läßt sich nicht wohl begreifen, wie man darauf Schwierigkeiten finden kann. Er fängt nicht mit Untersuchungen an, die über dem menschlichen Horizonte sind, sondern mit den einfachsten Wahrheiten, die ein Kind begreifen kann; mit Grundsätzen, deren Richtigkeit gleich einem jeden in die Augen fällt, sobald er nur die Worte versteht. Ich will die vornehmsten hersetzen:

1) **Von zweien Größen, die einander gleich sind, kann man immer eine in die Stelle der andern setzen.** Wenn nämlich die Größe, die man sich unter A vorstellt, so groß ist, als die Größe, welche man sich unter C vorstellt, und die Größe B ist eben so groß als C; so kann man A in die Stelle von C setzen, und sagen: B ist so groß als A; oder auch umgekehrt: A ist so groß als B.

Dies will sagen: **Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander** Sig. 11.

sel-

selber gleich. Z. B. wenn die Linie A der Linie C gleich ist, und die Linie B ist der Linie C auch gleich; so ist A auch der Linie B gleich. Wenn A 6 Ruthen, C 6 Ruthen und B ebenfalls 6 Ruthen groß ist; so ist A so groß als B.

2) Wenn zwei oder mehrere Größen einander gleich sind, und man setzt zu jeder einerlei Größe oder gleiche Größen hinzu; so sind die zusammengesetzten Größen auch wieder einander gleich. Z. B. Wenn die Linien A und B einander gleich sind, und die Linien C und D sind ebenfalls einander gleich; und man setzt C zu A und B hinzu: so ist die aus A und C zusammengesetzte Linie der Linie gleich, welche aus B und C zusammengesetzt ist. Fig. 12.

Setzt man hingegen C zu A und D zu B hinzu, so ist die aus A und C zusammengesetzte Linie so groß, als die aus B und D zusammengesetzte.

Wenn A 9 Fuß, B ebenfalls 9 Fuß, C 13, und D auch 13 Fuß ist; so ist A und C 22 Fuß, B und D ebenfalls 22 Fuß.

3) Wenn man von gleichen Größen, einerlei Größe, oder gleiche Größen wegnimmt: so sind die Größen, welche übrig bleiben, einander gleich. Wenn man von A 17 Fuß, B ebenfalls 17 Fuß, C 3 Fuß wegnimmt: so bleiben von A 14 und von B ebenfalls 14 Fuß übrig.

Wenn

Wenn man von A 19, die Linie C 7 Fuß, und von B 19, die Linie D 7 Fuß wegnimmt: so bleibt von A 12 und von B ebenfalls 12 Fuß übrig.

4) Wenn zwei Größen A und B und mehrere einander gleich sind, und man nimmt eine jede gleich oft: so sind die daraus entstehenden Größen einander gleich.

Wenn A 3 Fuß, viermal, und B 3 Fuß, auch viermal genommen wird: so entstehen aus der erstern 12 Fuß und aus der zweiten ebenfalls 12 Fuß, also gleiche Größen.

5) Wenn zwei und mehrere Größen einander gleich sind, so sind ihre Hälften, ihre Drittel, Viertel, Fünftel ꝛc. auch einander gleich, ~~und umgekehrt.~~

6) Wenn zwei und mehrere Größen der Hälfte, oder dem dritten Theile, oder dem vierten ꝛc. einer andern Größe gleich sind: so sind sie einander selbst gleich.

Wenn C 24 Fuß, und A die Hälfte von C, also 12 Fuß, und B ebenfalls die Hälfte von C, also auch 12 Fuß ist: so ist A so groß als B. u. s. w.

7) Wenn man zu gleichen Größen ungleiche hinzusetzt, oder von gleichen Größen ungleiche wegnimmt: so sind die daraus entstehenden Größen ungleich.

8) Wenn man zu ungleichen Größen gleiche hinzusetzt, oder von ungleichen Größen gleiche

selber gleich. Z. B. wenn die Linie A der Linie C gleich ist, und die Linie B ist der Linie C auch gleich; so ist A auch der Linie B gleich. Wenn A 6 Ruthen, C 6 Ruthen und B ebenfalls 6 Ruthen groß ist; so ist A so groß als B.

2) **Wenn zwei oder mehrere Größen einander gleich sind, und man setzt zu jeder einerlei Größe oder gleiche Größen hinzu; so sind die zusammengesetzten Größen auch wieder einander gleich.** Z. B. Wenn die Linien A und B einander gleich sind, und die Linien C und D sind ebenfalls einander gleich; und man setzt C zu A und B hinzu: so ist die aus A und C zusammengesetzte Linie der Linie gleich, welche aus B und C zusammengesetzt ist. Fig. 19.

Setzt man hingegen C zu A und D zu B hinzu, so ist die aus A und C zusammengesetzte Linie so groß, als die aus B und D zusammengesetzte.

Wenn A 9 Fuß, B ebenfalls 9 Fuß, C 13, und D auch 13 Fuß ist; so ist A und C 22 Fuß, B und D ebenfalls 22 Fuß.

3) **Wenn man von gleichen Größen, einerlei Größe, oder gleiche Größen wegnimmt: so sind die Größen, welche übrig bleiben, einander gleich.** Wenn man von A 17 Fuß, B ebenfalls 17 Fuß, C 3 Fuß wegnimmt: so bleiben von A 14 und von B ebenfalls 14 Fuß übrig.

Wenn

Wenn man von A 19, die Linie C 7 Fuß, und von B 19, die Linie D 7 Fuß wegnimmt: so bleibt von A 12 und von B ebenfalls 12 Fuß übrig.

4) Wenn zwei Größen A und B und mehrere einander gleich sind, und man nimmt eine jede gleich oft: so sind die daraus entstehenden Größen einander gleich.

Wenn A 3 Fuß, viermal, und B 3 Fuß, auch viermal genommen wird: so entstehen aus der erstern 12 Fuß und aus der zweiten ebenfalls 12 Fuß, also gleiche Größen.

5) Wenn zwei und mehrere Größen einander gleich sind, so sind ihre Hälften, ihre Drittel, Viertel, Fünftel ꝛc. auch einander gleich, ~~und umgekehrt.~~

6) Wenn zwei und mehrere Größen der Hälfte, oder dem dritten Theile, oder dem vierten ꝛc. einer andern Größe gleich sind: so sind sie einander selbst gleich.

Wenn C 24 Fuß, und A die Hälfte von C, also 12 Fuß, und B ebenfalls die Hälfte von C, also auch 12 Fuß ist: so ist A so groß als B. u. s. w.

7) Wenn man zu gleichen Größen ungleiche hinzusetzt, oder von gleichen Größen ungleiche wegnimmt: so sind die daraus entstehenden Größen ungleich.

8) Wenn man zu ungleichen Größen gleiche hinzusetzt, oder von ungleichen Größen glei-

gleiche wegnimmt: so sind die daraus entstehenden Größen ungleich.

9) Größen, die genau einerlei Raum ausfüllen, oder einerlei Raum ausfüllen können, wenn man eine in die Stelle der andern setzt, sind einander gleich.

Fig. 13. Wenn die Linien AB, CD, EF ꝛc. so beschaffen sind, daß, wenn man sie auf einander legt, so daß die Punkte C, E auf A fallen, alsdenn die Punkte D, F ebenfalls auf B fallen, und also diese Linien einander vollkommen decken: so sind alle diese Linien einander gleich.

§. 15. Es ist nicht leicht jemand, der nicht den Werth der Mathematik in ihrem ganzen Umfange eingesteht, wenn er dieses auch nur deswegen thut, um sich das Ansehen zu geben, als hätte er einige Einsichten darin. Die Zuverlässigkeit, mit welcher der wahre Astronom die Begebenheiten am Himmel vorhersagt, hat nicht wenig dazu beigetragen, ihr in den Augen der Welt einen Vorzug zu verschaffen, der den meisten Wissenschaften versagt, und aufs höchste der Kunst, Gold zu machen, zugestanden werden möchte. Und dennoch ist das Große, das Erhabne, das Außerordentliche, was sich in der That dabei findet, eine ganz natürliche Folge dieser eben angeführten so ungekünstelten und einfachen Grundsätze, die der Geometer nur benutzt und auf verschiedene Fälle anwendet. Sie sind die Boussole, mit der er sich auf das unendliche Meer der Wissenschaften sicher wagen und

die

die Klippen vermeiden kann, an denen so oft bei Untersuchung der Wahrheit gescheitert wird. Sie sind die Grundlage einer Wissenschaft, die bei allen Revolutionen, welche die übrigen erlitten haben und denen sie noch bis diese Stunde ausgesetzt sind, unerschüttert geblieben ist.

§. 16. Es ist indeß einem jeden zu vergeben, wenn er aus dem Grundsatze: **wenn man von zweien Größen, die einander gleich sind, gleiche Größen wegnimmt, so bleiben gleiche Größen übrig:** nicht gleich den Schluß macht: **die Erde ist eine Kugel;** und wirklich ist der sich klug dünkende und von Voltairen als ein Muster der Klugheit abgeschilderte Chinese, noch so dumm, die Welt als ein Viereck und sein Vaterland in der Mitte, desselben zu zeichnen ob er gleich jenen Grundsatz nicht bezweifelt. Der Abstand dieser Wahrheiten ist etwas groß, und ihr Zusammenhang fällt nicht so leicht in die Augen. Allein wenn man sich die Mühe giebt, sich mit erstern und ähnlichen §. 14. recht bekannt zu machen; wenn man sie bei allen seinen Untersuchungen beständig vor Augen hat, und sich der Leitung der Geometrie mit Geduld überläßt; so wird man unvermerkt mit den wichtigsten Wahrheiten bekannt, die ihren Erfindern ein immerwährendes Denkmal des Ruhms und der Ehre gestiftet haben.

Dritte Stunde.

Winkel.

§. 17.

Wer nur gewohnt ist, die Entfernung der Gegenstände mit dem Maasstabe in der Hand zu bestimmen, oder die Schritte von dem einen bis zum andern zu zählen, begreift nicht leicht, wie es möglich ist, den Abstand verschiedener Oerter zu messen, wenn natürliche Hindernisse, z. B. große Seen, Moräste, Flüsse, Wälder ꝛc., die zwischen sie liegen, verhindern von einem zum andern zu kommen. Viele gehen so weit, daß sie es nicht einmal für möglich halten, und sind in ihren Urtheilen um so dreister, wenn sie die Erfahrung auf ihrer Seite haben, daß man den Weg nicht machen kann. Daher findet der Astronom noch immer wenig Glauben, wenn er von der Entfernung der Gestirne spricht; und nichts weniger als eine andre Erfahrung, nämlich die ganze Erfüllung seiner Weißagungen, wird erfordert, um ihn nicht geradezu für einen Grillenfänger zu halten.

§. 18. Solche Schlüsse würden allerdings richtig sein, wenn man nicht Mittel hätte, diese scheinbare Unmöglichkeit zu heben, und aus dem, was uns von einigen Größen bekannt ist, mit eben der Zuverlässigkeit die davon abhangenden uns

bekann-

bekannten zu bestimmen, als wenn wir sie selbst ausgemessen hätten.

Diese Mittel aber giebt uns die Meßkunst an die Hand. Sie zeigt uns, wie das Maaß unzugänglicher Linien von andern abhängt, die wir wirklich ausmessen können, und wie überhaupt aus einer geringen Anzahl allgemeiner Wahrheiten sich dasjenige durch Schlüsse herausbringen läßt, was wir entweder gar nicht oder doch nur durch mühsame Erfahrungen finden könnten. So sind wir dadurch, daß wir an zweien Orten oder Punkten eine Menge Winkel messen können, im Stande, mit der größten Bequemlichkeit eine Gegend aufzunehmen, welches uns viele Mühe und Arbeit machen würde, wenn wir nicht bestimmen könnten, wie Linien und Winkel von einander abhangen.

§. 19. Ein Winkel aber entsteht, wenn zwei gerade Linien AB, AC in einem Punkte zusammen treffen, und man beurtheilt die Größe desselben nach der Lage, welche eine z. B. AC gegen die andere AB hat. Je mehr sich erstere gegen die letztere neigt, oder je weniger sich AC von AB entfernt, je kleiner ist der Winkel. Wenn daher eine andre Linie AD ebenfalls durch den Punkt A geht, und sich weniger gegen AB neiget als AC, so ist man darüber vollkommen einig, daß der Winkel DAB größer sei, als der Winkel CAB.

Fig. 14.

§. 20. Die Neigung allein bestimmt daher die Größe des Winkels, und die Größe der Linien AB, AC, welche ihn zusammen machen, hat darauf gar keinen Einfluß. Man mag die eine bis E, G und die andere bis F, H und so weit als man will, verlängern: so wird der Winkel immer einerlei Größe behalten, wenn nur bei der Neigung dieser Linien keine Veränderung vorgeht. Daher ist es in diesem Falle gleichgültig, ob man den Winkel BAC, oder BAF, oder GAC oder GAH nennt; er bleibt immer ebenderselbe.

Fig. 15.

§. 21. Um sich kürzer und bequemer auszudrücken, ist man übereingekommen, die geraden Linien, welche an einem gewissen Punkte einen Winkel machen, die Schenkel, und den Punkt, wo sie aneinander stoßen, die Spitze oder den Scheitel desselben zu nennen. Wenn man verschiedene Winkel mit einander vergleichen muß, so ist es äußerst wichtig, sie alle so zu bezeichnen, daß man einen von dem andern unterscheiden kann. Da man gemeiniglich dabei die Buchstaben nicht entbehren kann, so setzt man allezeit den Buchstaben, der die Spitze bezeichnet, in die Mitte, und die übrigen auf beiden Seiten stehenden bezeichnen die Schenkel desselben. Wenn daher AB, AC die Schenkel eines gewissen Winkels sind, dessen Spitze A ist, so sagt man: der Winkel BAC und nicht ABC, oder ACB oder BCA; weil man

im letztern Falle nicht wissen würde, von welchem Winkel die Rede wäre.

§. 22. Wenn es angeht, daß man einen Winkel auf den andern dergestalt legen kann, daß die Spitzen und zwei Schenkel auf einander fallen, so siehe man leicht, welcher von beiden größer ist. Allein, dies Aufeinanderlegen geht in wenigen Fällen wirklich an; und doch soll man oft bestimmen, ob ein Winkel größer oder kleiner sei, als ein anderer. In dergleichen Fällen muß man seine Zuflucht zu einer Art von Erdichtung nehmen, und sich in Gedanken vorstellen, daß man einen Winkel auf den andern lege. Wenn z. B. die beiden Winkel CAB, DEF gegeben werden, so kann man sich ohne Zweifel vorstellen, man lege den Winkel DEF auf den Winkel BAC dergestalt, daß die Spitze E auf die Spitze A und der Schenkel FE auf den Schenkel BA falle. Kann man nun beweisen, daß alsdenn der Schenkel DE außerhalb oder zwischen die Schenkel BA, CA falle, so beweiset man dadurch zugleich, daß im ersten Falle der Winkel DEF größer, im zweiten kleiner ist, als der Winkel BAC. Fig. 16. 17. 18.

§. 23. Wenn man daher beweisen kann, daß die Schenkel zweier Winkel BAC, DEF wirklich auf einander fallen, oder fallen können, oder fallen müssen, wenn man die Spitze E auf A und EF auf AC legt, so sind diese Winkel einander gleich. Wenn hingegen zwei Winkel BAC, DEF einander gleich sind, und man legt Fig. 19.

wirklich, oder nur in Gedanken, die Spitze E auf die Spitze A und den Schenkel FE auf CA; so muß auch der Schenkel DE auf den Schenkel BA fallen, und überhaupt der Winkel DEF dem Winkel BAC decken. (§. 22.)

Fig. 20. §. 24. Da man durch einen Punkt A, in einer geraden Linie BC, so viel gerade Linien ziehen kann, als man will, wodurch unzählige Winkel entstehen; so kann man gewiß auch eine gerade Linie DA dergestalt ziehen, daß die beiden neben einander liegenden Winkel DAC, DAB einander gleich sind. In diesem Falle heißt ein jeder dieser Winkel ein rechter Winkel, und die Linie DA ist auf BC perpendikulär, lothrecht oder senkrecht. Von allen übrigen Linien, die durch den Punkt A gezogen werden können, sagt man, sie fallen schief auf BC, und der Winkel EAC, welcher kleiner ist, als ein rechter Winkel, wird ein spitzer Winkel, der Winkel EAB aber, Fig. 21. der größer als ein rechter Winkel ist, ein stumpfer Winkel genennt.

§. 25. Zwei auf einer geraden Linie BC, neben einander liegende Winkel EAC, EAB Fig. 21. sind zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich. Denn wenn man durch A die Linie DA auf BC senkrecht zieht, so ist die Summe der beiden Winkel EAC und BAE offenbar so groß als die Summe der beiden Winkel BAD, CAD, von den ein jeder ein rechter Winkel ist.

Dies

Dieses ist auch umgekehrt wahr. Wenn nemlich die Summe zweier neben einander liegenden Winkel EAC, BAE zweien rechten Winkeln gleich ist, so liegen die Schenkel BA und AC in einer geraden Linie. Wäre dies nicht, so mag, wenn es möglich wäre, AF mit BA in einer geraden Linie sein. Es liegen also, nach dieser Voraussetzung, die Winkel BAE, EAF neben einander auf einer geraden Linie, also wären sie zusammen zweien rechten Winkeln gleich. (§. 25.) Allein die Winkel BAE und EAC sind zusammen schon zweien rechten gleich. Also wäre die Summe der Winkel BAE und EAC der Summe der Winkel BAE, EAF gleich; und wenn man von jeder Gleiches, nemlich den Winkel BAE, wegnähme, so würden die übrig bleibenden Winkel EAC, EAF auch einander gleich sein müssen. Allein der Winkel EAC ist dem Winkel EAF nicht gleich, weil der Schenkel CA des erstern innerhalb der Schenkel des zweiten fällt (§. 22.) demnach ist die Voraussetzung, daß eine gerade Linie ausser AC z. B. AF mit BA in einer geraden Linie sein könne, ungereimt. Fig. 22.

§. 26. Hieraus folgt auch, daß sich zwei gerade Linien in nicht mehr als in einem Punkte durchschneiden können. Denn wenn die Linie CD die Linie AB in den Punkten E und F schnitte, und man zöge durch E eine Linie GE, so wären die Winkel AEG und GEB zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich. Weil Fig. 22. a.

aber AB eine gerade Linie ist, so wären auch die Winkel AEG und GEB zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich (§. 25.) Nimmt man von beiden Summen den Winkel AEG weg, so wäre nach §. 14. n. 3. der Winkel GEF dem Winkel GEB oder das Größere dem Kleineren gleich, welches unmöglich ist.

§. 27. Die im Anfange des 25ten Paragraphen gemachte Bemerkung führt uns unmittelbar auf eine andere. Wenn sich nämlich zwei gerade Linien BC, DE in A durchschneiden; so sind die Scheitelwinkel, oder die, welche bei der gemeinschaftlichen Spitze einander gegenüber liegen, nämlich BAD, EAC, oder auch BAE, DAC einander gleich.

Fig. 23.

Denn die Summe der beiden Winkel BAE, BAD ist zweien rechten Winkeln, und die Summe der beiden Winkel CAE, BAE ebenfalls zweien rechten Winkeln gleich. (§. 25.) Es ist also die erste Summe der letztern gleich. (§. 14. n. 1.) Nimmt man von jeder den Winkel BAE weg, so bleibt von der ersten der Winkel BAD, von der zweiten der Winkel CAE übrig, und diese sind einander auch gleich. (§. 14. n. 3.) Eben so beweist man auch, daß die Winkel BAE, CAD einander gleich sind.

Vierte

Vierte Stunde.

Augenmaß und Geometrische Methode.

§. 28.

Ein gutes Augenmaß verschaft dem Offizier überwiegende Vortheile, wenn man auch nicht das militärische, sondern bloß das geometrische nimmt. Es ist die Wissenschaft, die Lage und Entfernung der Gegenstände durch den Eindruck, den sie auf das Auge machen, zu bestimmen, ohne sich dabei der gewöhnlichen Werkzeuge und Methoden zu bedienen, welche nach und nach zu diesem Behuf erfunden sind. Man muß nun freilich dabei nicht die größte Genauigkeit erwarten; allein durch eine fortgesetzte Uebung, und wenn man die Hülfsmittel, welche die Geometrie uns angiebt, gehörig anwendet, kann man es doch darin zu einem gewissen Grade der Vollkommenheit bringen, mit dem man in vielen Fällen zufrieden sein kann. Die Lage, welche die Gegenstände gegen einander haben, wird aber durch die Winkel bestimmt, welche die Linien mit einander machen, die man von einem jeden, z. B. B, C, D, E nach dem Punkte A, wo sich das Auge befindet, ziehen kann. Und wenn man denn, wie es gemeiniglich der Fall ist, eine Zeichnung von der Gegend, auf der sie sich befinden, machen soll; so kömmt es hauptsächlich darauf an, diese Winkel BAC, CAD, DAE zu Fig. 24.

bestimmen. Denn wenn man auch die Entfernungen AB, AC, AD, AE wüßte, so würde man ohne die Winkel doch nicht viel gewonnen haben.

§. 29. Wer sich daher ein gutes Augenmaß verschaffen will, muß sich Mühe geben, die Winkel, unter welchen die Gegenstände sich dem Auge darstellen, auf dem Papiere so genau zu entwerfen, als es nur möglich ist. Wenn die ersten Versuche in dieser Absicht nicht gleich nach Wunsch gelingen: so muß man sich dadurch nicht abschrecken lassen, sondern mit dieser Arbeit unverdrossen fortfahren, und dann wird man es nach und nach zu einer ziemlichen Fertigkeit bringen. Wenn man nun die Entfernung der Gegenstände von dem Auge auch mit eben der Genauigkeit schätzen könnte, so würde man in den meisten Fällen mit dem bloßen Augenmaße vollkommen ausreichen; allein hierin ist man bei der größten Uebung immer noch großen Fehlschlüssen ausgesetzt. Denn wenn man gleich weiß, daß ein Gegenstand desto weiter vom Auge entfernt ist, je kleiner, blässer und unordentlicher er aussieht, so kann man doch nie mit Gewißheit sagen, um wie viel Schritte, Fuß ꝛc. er weiter oder näher ist; und wenn die Entfernungen sehr groß sind, so scheinen öfters einige, die um tausend Schritte weiter sind, mit den nähern einerlei Entfernung zu haben. Daher muß man sich dabei mit einem billigen Ungefähr begnügen, wenn man nicht dadurch, daß man Leute zu Rathe zieht,

die

die der Gegend kundig sind, diesem Fehler etwas abhelfen kann. Will man sich aber nicht mit einer bloßen Schätzung begnügen, so kann man auch diese Entfernungen in den mehresten Fällen bis auf einen kleinen Fehler bestimmen, wenn man die Winkel zu zeichnen weiß, und je genauer diese getroffen werden, desto geringer wird dieser Fehler. Wenn man mit den Eigenheiten der Dreiecke näher bekannt sein wird, so wird man sich davon bald überzeugen. Von den verschiedenen Arten, wie man zur Kenntniß der Entfernungen zweier Oerter oder Punkte von einander kommen kann, will ich indessen nur eine anführen.

§. 30. Man stelle sich zwei Gegenstände, z. B. Berge, Dörfer ꝛc. A, B vor, zwischen den sich ein See, Morast oder Wald ꝛc. befindet, der uns verhindert, die gerade Linie Fig. 25. von dem einen zum andern zu messen; hingegen kann man von dem Punkt C sowohl nach A als B kommen, und Entfernungen CA, CB messen. Man soll nun hieraus bestimmen, wie weit A von B ist.

Wenn man von C aus auf der Gegend nach allen Seiten fortgehen kann, so verlängere man die Linien CB, CA bis D und E, und mache CE so groß als CB, und CD so groß als AC: messe hernach die Linie DE, so ist diese so groß als AB.

§. 31. Es fällt nicht sogleich in die Augen, daß man auf diese Art zur Kenntniß der Entfernung der beiden Gegenstände gelangt; dies muß daher

daher bewiesen, oder welches einerlei ist, es müssen die Gründe angezeigt werden, aus den man mit Gewißheit schließen kann, daß man dasjenige wirklich finde, was man sich zu suchen vorgenommen hat. In dieser Absicht bemerke ich erstlich: daß der Winkel DCE dem Winkel ACB gleich ist, weil Beide Scheitel-Winkel sind (§. 27.) Zweitens ist nach der Vorschrift die Linie CE der Linie CB, und CD der Linie CA gleich gemacht worden.

Weil also diese Winkel einander gleich sind, so kann man in Gedanken den Winkel DCE auf ABC legen, so daß der Schenkel CE auf den Schenkel CB und der Schenkel CD auf den Schenkel CA fällt. (§. 23.) Da aber auch CE so groß ist, als CB, so fällt der Punkt E auf B, und da CD so groß als CA ist, so fällt der Punkt D auch auf den Punkt A. Wenn demnach die äußersten Punkte der Linie DE auf die äußersten Punkte der Linie BA fallen, so ist offenbar die Linie DE der Linie AB oder der Entfernung der Punkte A und B gleich. (§. 14. n. 9.)

§. 32. Auf diese Art verfährt der Geometer allemal, um sich und andre von der Richtigkeit einer Sache zu überzeugen. Er verlangt nie, daß man ihm auf sein bloßes Wort glauben soll, sondern zeigt in jedem Falle, daß das, was er vorträgt, eine ungezwungene Folge aus Grundsätzen ist, die niemand in Zweifel zieht: und dieses nennt er beweisen.

§. 33. In den Schriften der Geometer findet man die Ueberschriften, Lehrsätze, Aufgaben, Auflösung und Beweis häufig. Man muß diese Ausdrücke nicht für überflüßig halten. Ungeachtet sie nichts Wesentliches sind, so zeigen sie doch an, auf was man eigentlich seine Aufmerksamkeit richten soll. Lehrsatz, zeigt z. B. an, daß eine gewisse Wahrheit vorgetragen wird; da aber niemanden zugemuthet werden kann, sie ohne weitre Umstände anzunehmen, so folgt unmittelbar darauf der Beweis, in dem der Geometer seine Schlüsse aus einander setzt, und dadurch die Uebereinstimmung seines Satzes mit unmittelbaren Grundsätzen oder andern Wahrheiten zeigt, mit den er seinen Leser schon vorher bekannt gemacht hat.

§. 34. Bei den Aufgaben wird verlangt, daß etwas gemacht oder gefunden werden soll. Der Geometer trägt daher unter dieser Ueberschrift die Sache vor, ohne etwas einzumischen, was nicht dazu gehört. Hernach giebt er in der Auflösung die Mittel an, durch die man zu seinem Zweck gelangen kann. Da aber dabei allerdings die Frage möglich ist, ob man durch das vorgeschriebene Verfahren auch seine Absicht wirklich erreicht? so fügt er noch den Beweis hinzu, und zeigt darin, daß, wenn man auf die von ihm angegebene Art zu Werke geht, man das in der That findet, was man finden wollte.

§. 35. Bei allen diesen Untersuchungen nähert sich der Geometer jedesmal seiner Absicht mit

lang-

seinen und vorsichtigen Schritten. Da auch in der Welt nichts gewöhnlicher ist, als daß sich Leute über Dinge zanken, davon ein jeder ganz verschiedene Begriffe hat; so ist er sorgfältig darauf bedacht, diese Quelle unnützer Streitigkeiten zu verstopfen. Daher schickt er seine **Erklärungen** von den Sachen voraus, die er vortragen will; bestimmt, was man für Begriffe mit seinen Worten verbinden soll; und zeigt die **Grundsätze** an, nach den man ihn beurtheilen kann. Durch dies Verfahren sind die Sekten in der Geometrie vermieden worden, die man in den übrigen Wissenschaften so gut wie in der Religion findet, und von den ein alter Weltweiser Gelegenheit nahm zu behaupten: daß keine Narrheit in der Welt sei, die nicht von einem oder dem andern Philosophen schon gesagt worden, oder noch gesagt werden wird.

§. 36. Um die Kette von seinen Schlüssen besser übersehen und prüfen, auch sich kürzer ausdrücken zu können, bedient sich der Geometer zu mehrerer Bequemlichkeit einiger Zeichen. Anstatt z. B. zu sagen: die Größe A ist der Größe B gleich, schreibt er

$$A = B$$

so, daß das Zeichen = die Gleichheit ausdrückt. Anstatt zu sagen, die Größe A und B zusammen genommen, oder die Summe der Größen A und B: schreibt er

$$A + B$$

Anstatt

Anstatt zu sagen: Wenn von der Größe A die Größe B weggenommen wird, oder die Größe A weniger der Größe B, schreibt er

$$A - B$$

so daß das Zeichen + das Zusammensetzen oder Hinzusetzen, das Zeichen — aber das Wegnehmen oder Abziehen bedeutet.

§. 37. Man wird nunmehr leicht verstehen, was z. B.

$$A + B = C + D$$

oder $A - B = C + D$

sagen will. Im erstern Falle sind beide Größen A und B zusammen genommen der Summe der Größen C und D gleich, im zweiten Falle ist der Unterschied der Größen A und B der Summe der Größen C und D gleich. Eben so leicht fällt in die Augen, was

$$A + B - C = D$$

oder $A - B + C = D - E$

anzeigt. Durch A, B ꝛc. kann man übrigens alle Arten von Größen ausdrücken, es mögen Linien oder Winkel ꝛc. sein. Dadurch wird der Vortrag ungemein abgekürzt und in gewissem Verstande ganz sinnlich gemacht. Man muß übrigens in diesen Zeichen keine Geheimnisse suchen.

Fünfte

Fünfte Stunde.

Dreiecke und Cirkel.

§. 38.

So bald Gesellschaften entstanden, die nicht wie die Wilden herumschwärmen, sondern sich in einer Gegend niederlassen wollten, die das hervorbrachte, wodurch sie ihre Bedürfnisse befriedigen konnten; so mußten sie bald auf den Gedanken kommen, die Oberfläche der Erde, welche sie bewohnten unter sich zu theilen. Anfänglich geschah dies vielleicht nach Willkühr, so lange man noch Raum übrig hatte, sich weiter auszubreiten. Sobald aber das Eigenthum einer Familie an Ländereien, unter die Erben nach gewissen Verhältnissen wieder getheilt werden sollte; so mußte man natürlich auf die Art denken, wie dieses so geschehen könnte, daß ein jeder überzeugt würde, er habe das ihm Zugehörige auch wirklich erhalten.

§. 39. Ueberhaupt ist es nicht leicht, jemanden von der Richtigkeit einer Sache zu überzeugen; sehr schwer aber, wenn sich das Mein und Dein dabei mit ins Spiel mischt. Denn in dergleichen Fällen will der größte Theil der Menschen seine Ueberzeugung fühlen; er will die Wahrheit, so zu reden, mit Händen greifen; der Verstand soll wenig, die Sinne aber desto mehr urtheilen; kurz, man will eine anschauende Erkenntniß

niß, das will sagen, eine so deutliche Erkenntniß haben, als das Auge bei dem Anblick eines Gegenstandes gewährt. In der That ist dies die allervollkommenste Erkenntniß, und wir wären glücklich, wenn wir sie in allen Fällen so haben könnten.

§. 40. Wenn wir, wie es wahrscheinlich ist, annehmen, daß die Absicht, die Felder einzutheilen, Gelegenheit zur Aufsuchung der Grundsätze der Geometrie gab; so mußte man bald auf den Begrif der Figur geleitet werden. Alle Gegenstände in der Natur erscheinen uns unter einer gewissen Gestalt oder Figur, und wenn wir dabei das weglassen, was zufällig ist, als die Farben, ihre innere Einrichtung, ihre Lage gegen einander ꝛc.; so bleibt der Begrif eines Raums übrig, der in gewissen Grenzen eingeschlossen ist, und diesen nennt man die Figur. Bei Gegenständen, die nach der Länge, Breite und Höhe ausgedehnt sind, und die man Körper nennt, sind diese Grenzen, die Oberflächen oder äussere Flächen, und die Art, wie diese mit einander verbunden sind, bestimmen die Figur desselben. Bei andern, die nur nach der Länge und Breite ausgedehnt sind, sind es die Linien, welche den äußern Umfang bilden, nach welchen wir die Figur beurtheilen; und wenn man den Linien eine gewisse Figur zuschreibt, so geschieht dies in Rücksicht auf die Art, wie sie

fortlaufen oder zwischen ihren äußersten Punkten eingeschlossen sind.

§. 41. Bei den Figuren, die nur in Linien eingeschlossen sind, stellt man sich eine Fläche vor, in der sie liegen, und die eine Ausdehnung nach der Länge und Breite ist. Diese Flächen können unendlich verschieden sein: doch aber kann man keine andere, als krumme und gerade oder ebene Flächen denken. Eine ebene Fläche, oder schlechthin eine Ebene, hat die Eigenschaft, daß eine gerade Linie, die durch zwei willkührlich angenommene Punkte in derselben gezogen wird, niemals aus dieser Fläche kömmt, man mag sie so weit verlängern, als man will; dieses findet aber bei krummen Flächen nicht statt.

§. 42. Die sogenannte ebene Geometrie beschäftigt sich mit Untersuchung der Figuren, die in einer Ebene gedacht oder beschrieben werden können und in geraden Linien eingeschlossen sind. Das Dreieck, oder die Figur, die in dreien geraden Linien eingeschlossen ist, ist unter allen die einfachste, und in diese lassen sich alle übrigen Figuren zertheilen, deren Grenzen gerade Linien sind. Sind darin alle Seiten einander gleich, so ist es ein gleichseitiges; sind zwei Seiten einander gleich, so ist es ein gleichschenkliches; ist keine Seite der andern gleich, so ist es ein ungleichseitiges Dreieck.

Ist in einem Dreieck ein rechter Wi
heißt es ein rechtwinkliches; ist darin ein
pfer Winkel, so heißt es ein stumpfwink
sind alle drei Winkel spitze Winkel, so ist
spitzwinkliches.

§. 43. Wenn sich eine gerade Lin
um einen Punkt A herum bewegt,
schreibt der Punkt B den Umkreis ein
gur, die man einen Zirkel nennt. Die
offenbar die Eigenschaft, daß alle gerade
AC, AD, AE ꝛc. die von dem Punkt A
man den Mittelpunkt nennt, bis an einen
in dem Umkreise gezogen werden können,
der gleich sind.

§. 44. Der Zirkel ist die einzige kr
nigte Figur, mit der sich die ebene Geomet
schäftigt; alle übrigen sind der höhern Geo
vorbehalten. Das Instrument, dessen m
bedient, um auf dem Papiere beim Zeichnen
Zirkel zu beschreiben, ist hinlänglich bekannt
man kann nicht allein in Gedanken, sonder
wirklich allemal einen Zirkel durch zwei ge
Punkte beschreiben, deren Entfernung die
zen dieses Instruments nicht überschreitet.
geachtet man aber in tausend Fällen diesen
nicht wirklich beschreiben kann, so kann m
doch allemal einen Zirkel vorstellen, der dur
Punkte geht; und dies ist hinreichend.
setzt auch der Geometer dies als möglich

wenn bei Auflösung seiner Aufgaben die Beschreibung eines Zirkels erfordert wird.

§. 45. Ueberhaupt werden alle Aufgaben in der ebenen Geometrie durch gerade Linien und Zirkel aufgelöst. Die leichteste unter allen ist:

Fig. 27. **Auf einer gegebenen geraden Linie AB ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben.**

Man nehme jeden von den äußersten Punkten A und B zum Mittelpunkt eines Zirkels an, und beschreibe aus demselben mit der Entfernung AC = AB einen Zirkel; so werden sich diese nothwendig in einem Punkt C durchschneiden. Man ziehe nun nach diesem Punkt die geraden Linien AC, BC, so ist die Figur ABC ein gleichseitiges Dreieck, weil sowohl AC, als CB so groß als AB, und also alle drei Seiten einander gleich sind.

Sechste

Sechste Stunde.

Eigenschaften der Dreiecke.

§. 46.

Man darf sich nicht schmeicheln, in einer Kunst, in einer Wissenschaft oder in einem Fache, es sey welches es wolle, es zu einer gewissen Höhe zu bringen, wenn man sich begnügt, die Gegenstände, welche den Vorwurf derselben ausmachen, bloß nach der Oberfläche kennen zu lernen. Nur dann, wenn man tief in das Wesen eines Dinges eindringt, wenn man es sorgfältig zergliedert, und sich mit den Eigenschaften desselben bekannt macht; wenn man das Zufälligr von dem Wesentlichen absondert, und es in Verbindung mit andern betrachtet, gelangt man zu einer gewissen Festigkeit in seinen Kenntnissen, übersieht sein Fach und ist in jedem Falle seiner Sache gewiß. Eben dadurch unterscheidet sich der wahre Geometer von dem geometrischen Handwerker, der gewöhnlich eine desto höhere Meinung von seinen Kenntnissen hat, je weniger er von dem ganzen Felde der Meßkunst übersieht, dennoch aber, wie der Marktschreier auf der Bühne, seine Kunststücke ausräht; seinen Zuhörern versichert, daß die Newtöns, die Euler, die Alambert u. s. w. elende Stümper sind, die bei ihm in die Schule gehen müßten, und daß er mit seinem Universalmittel, der Bussole, alle

der, vom Nord- bis zum E
bis zum Niedergange ausm

§. 47. Bei allen Figu
drei Stücke in Betrachtung:
den Umfang derselben beſti
welche von den Seiten gebil
Raum, den die Seiten ei
ſtehen mit einander in einer
und jede Veränderung, wel
Stücken vorgeht, hat auf di
Will man daher Figuren mi
ſo muß man auf alle dieſe d
Rückſicht nehmen, um in A
niſſes gegen einander etwas
Wir werden das Dreieck, a
zuerſt vornehmen.

Fig. 28. §. 48. Wenn in zwe
a b c, die Seite AB der E
AC der Seite a c, und d
gleichen Seiten einſchlie
Winkel CAB dem Winkel
gleich iſt; ſo iſt auch

1) die Seite CB der E

2) Der Winkel ABC, d
gegen über liegt, dem
cher der Seite a c gege
ſten gleich iſt.

3) Der Winkel ACB, wel
über liegt, dem Wink

der Seite a b gegen über liegt, die der ersten gleich ist.

4) Ist das ganze Dreieck ABC, das ist, der Raum, der von dessen Seiten eingeschlossen wird, dem Dreieck a b c oder dem Raum gleich, der von den Seiten dieses letztern eingeschlossen wird.

Um sich hiervon zu überzeugen, lege man in Gedanken das Dreieck ABC auf das Dreieck a b c, dergestalt, daß der Punkt A auf a und die Linie AB auf a b falle; so wird der Punkt B auch auf den Punkt b fallen, weil beide Linien einander gleich sind.

Weil ferner der Winkel BAC dem Winkel b a c gleich ist, so fallen zugleich die Schenkel derselben auf einander (§. 23.); folglich die Linie AC auf die Linie a c, und der Punkt C auf den Punkt c; weil die Linien AC, a c einander gleich sind.

Das Dreieck ABC fällt also genau auf das Dreieck abc, und nunmehr ist kein Zweifel, daß die Seite CB auch der Seite c b gleich, und alles übrige gerade so sei, wie es angegeben worden.

§. 49. Man hat hier keine besondere Art von Dreieck benennt; denn es findet dies bei allen Statt, sie mögen gleichschenklich oder gleichseitig sein.

§. 50. Sind aber diese Dreiecke gleichschenklich, so daß nicht allein AC = a c, sondern auch

AC = AB und a c = a b, so kann man nicht allein die Dreiecke so aufeinander legen, daß die Seite AB auf a b fällt, sondern auch, daß die Seite AC auf a b fällt.

Im ersten Falle ist also der Winkel ACB dem Winkel a c b gleich (§. 48.), im zweiten Falle ist Fig. 29. aber auch der Winkel ABC dem Winkel a c b gleich. Daher ist auch der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich. (§. 14. n. 1.)

§. 51. In einem gleichschenklichen Dreieck ABC, nennt man die Linien AB, AC, welche einander gleich sind, die Schenkel- und die dritte Linie BC die Grundlinie. **Daher sind in einem gleichschenklichen Dreieck die Winkel an der Grundlinie einander gleich.**

§. 52. Ein gleichseitiges Dreieck ABC läßt Fig. 30. sich auch als ein gleichschenkliches ansehen. Es sind also die Winkel ABC, BAC einander gleich, wenn man AB, AC für die Schenkel annimmt. Nimmt man aber AB und BC für die Schenkel an, so ist auch der Winkel BAC dem Winkel BCA gleich. **Demnach sind in einem gleichseitigen Dreieck nicht allein die Seiten, sondern auch die Winkel einander gleich.**

Fig. 31. §. 53. **Wenn in einem Dreieck ABC zwei Winkel gleich sind, ABC = ACB, so sind auch die diesen Winkeln gegen über liegenden Seiten einander gleich; nemlich AB = AC.**

Ge-

Gesetzt, AB wäre größer als AC, so mache man BD = AC; so wird die Linie CD innerhalb des Dreiecks fallen, und also der Winkel BCD kleiner sein, als der Winkel BCB. ACB.

In den beiden Dreiecken ABC, BCD, ist also BC gemeinschaftlich BD = AC gemacht worden, der Winkel DBC ist dem Winkel ACB nach der Voraussetzung gleich; demnach würde auch das Dreieck BCD dem Dreieck ABC, (§. 48.) das Kleinere dem Größern gleich sein; welches ungereimt ist.

§. 54. **Wenn in zweien Dreiecken ABC, abc die Seiten gleich sind, nemlich** Fig. 32.

AB = ab, AC = ac, BC = bc. + AC.

so sind die Winkel, die gleichen Seiten gegen über liegen, und überhaupt die Dreiecke einander selbst gleich.

Man lege die Dreiecke an einander, so daß a b auf AB falle, und ziehe die Linie C c; so entstehen zwei Dreiecke ACc, BCc, die folgende Eigenschaften haben.

AC ist so groß als a c, daher ist auch der Winkel ACc = AcC (§. 51.) Ferner ist BC = bc. Demnach auch der Winkel BCc = BcC. (§. 91.)

oder ACc = acC

BCc = bcC.

Demnach auch

ACc + BCc = acC + bcC. (§. 14. n. 2.)

Es ist aber die Summe der Winkel ACc, BCc dem Winkel ACB, und die Summe der Winkel acC, bcC dem Winkel acb gleich. Demnach ist in den beiden Dreiecken ABC, abc, AC = ac, BC = bc, und die eingeschlossenen Winkel ACB = acb. Daher ist auch der Winkel CAB = cab, CBA = cba, und überhaupt das Dreieck ABC dem Dreieck abc gleich. (§. 48.)

Fig. 33. §. 51. Wenn man in einem Dreieck ABC eine Seite, welche man will, verlängert, z. B. AB bis D; so ist der äußere Winkel CBD beständig größer, als ein jeder von den innern ihm gegen über liegenden BCA oder BAC.

Man theile in Gedanken CB in E in zwei gleiche Theile, ziehe AE, und verlängere diese Linie bis EF = AE ist. Endlich ziehe man DF; so ist gewiß der Winkel CBD größer, als der Winkel CBF.

In den beiden Dreiecken ACE, BEF ist AE = FE, BE = EC gemacht worden, und der Winkel BEF = AEC, weil es Scheitelwinkel sind. (§. 27.)

Es ist also auch der Winkel EBF oder CBF = ECA oder BCA (§. 48.), und also offenbar DBC größer, als CBF oder BCA.

Um zu beweisen, daß der Winkel CBD auch größer sei, als der Winkel CAB, darf man nur CB bis G verlängern; so wird der Winkel ABG

=

= CBD (§. 27.), und dann läßt sich eben wie vorhin zeigen, daß der Winkel ABG, das ist CBD, größer ist, als der Winkel CAB.

Fig. 33. a

§. 56. In einem rechtwinklichen Dreieck ist nur ein rechter Winkel, die übrigen beide sind spitze Winkel.

Denn wenn man eine von den Seiten AB oder AC welche den rechten Winkel BAC einschließen bis D oder E verlängert; so ist der äußere Winkel CBD oder BCE größer als der ihm gegen über liegende rechte Winkel BAC. Folglich da die Winkel CBD, CBA zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich sind (§. 25.) und der Winkel CBD größer ist als ein rechter Winkel, so muß der nebenliegende Winkel CBA kleiner als ein rechter Winkel sein.

§. 57. Auch ist in einem stumpfwinklichen Dreieck BAC nur ein stumpfer Winkel.

Es sei CAB der stumpfe Winkel und nun verlängere man AB bis D; so ist der äußere Winkel CBD größer als der stumpfe Winkel CAB. Es ist aber CBD + CBA = 2 rechten Winkeln = R + R wenn R einen rechten Winkel bedeutet. Nimmt man nun auf beiden Seiten den Winkel CBD weg, der größer ist als ein rechter Winkel; so bleibt der Winkel CBA übrig, der nothwendig kleiner ist als ein rechter, folglich ein spitzer Winkel. (§. 14. n. 7.)

Fig. 33. b

§. 58. Wenn in zweien Dreiecken ABC, abc die Seiten AB, ab und die an diesen Seiten

Fig. 34.

ten liegenden Winkel einander gleich sind, nemlich BAC = bac, ABC = abc; so sind die Dreiecke einander gleich: der Winkel ACB = acb und die gleichen Winkeln gegen über liegende Seiten AC = ac, BC = bc.

Man lege in Gedanken das Dreieck abc auf ABC, so daß ab auf AB und a auf A falle.

Weil der Winkel bac dem Winkel BAC gleich ist; so muß der Schenkel ac auf AC, und der Punkt c irgendwo auf die Linie AC fallen. (§. 23.) Fiele er zwischen A und C, so wäre der Winkel abc kleiner, als ABC; fiele er aber außerhalb A und C, so wäre der Winkel abc größer als ABC. Beides würde der Voraussetzung widersprechen, nach der sie einander gleich sind. Der Punkt c muß daher auf den Punkt C fallen, so daß die Dreiecke einander völlig decken, und hieraus ergiebt sich das Uebrige von selbst.

§. 59. Wenn in einem Dreieck ABC die Winkel BAC, BCA den Winkeln bac, bca in einem andern Dreieck abc gleich, nemlich BAC = bac; BCA = bca und die Seiten, die einem von den gleichen Wmkeln gegen über liegen, auch einander gleich sind, nemlich BA = ba; so sind auch die übrigen Seiten und der dritte Winkel einander gleich: das will sagen, AC = ac BC = bc und der Winkel ABC = abc.

Fig. 34.

Um sich hiervon zu überzeugen, lege man in Gedanken das Dreieck a b c auf ABC, so daß die Seite ab auf AB fällt; so wird die Seite ac auf AC fallen, weil die Winkel BAC, bac nach der Voraussetzung einander gleich sind. (§. 23.)

Man setze nun, der Punkt c fiele nicht auf C, sondern zwischen A und C, so wäre acb der äußere Winkel in dem Dreieck cCB also größer als cCB oder ACB (§. 55.); da aber beide Winkel gleich sind, so geht dies nicht an und der Punkt c kann nicht zwischen A und C fallen.

Fiele aber der Punkt c außerhalb C auf die verlängerte Linie AC; so wäre der Winkel ACB der äußere Winkel in dem Dreieck BCc, und daher wieder größer als der Winkel acb, dem er doch nach der Voraussetzung gleich sein soll.

Wenn man daher die beiden Dreiecke, so wie angenommen worden, aufeinanderlegt, so kann der Punkt c nirgend anders als auf C fallen, und beide Dreiecke fallen genau auf einander. Daraus folgt denn alles übrige von selbst.

Siebente Stunde.

Eigenschaften der Dreiecke.

§. 60.

Wenn in einem Dreieck ABC die Seite AC gröſser ist, als AB; so ist auch der Winkel ABC, welcher der gröſsern Seite gegen über liegt, gröſser als der Winkel ACB, welcher der kleinern Seite gegen über liegt.

Fig. 35. Weil AC gröſser ist als AB, so mache man AD = AB, so wird der Punkt D zwischen A und C liegen. Man ziehe BD, so ist der Winkel ADB = ABD. (§. 51.) Nun ist ADB = ABD gröſser als ACB (§. 55.), also um so mehr ABC gröſser, als ACB.

Fig. 36. Eben dies ist auch umgekehrt richtig. In dem Dreieck ABC liegt dem gröſsern Winkel ABC auch die gröſsere Seite AC gegen über.

Denn wäre AC = AB, so wäre auch der Winkel ABC = ACB (§. 51.); wäre aber AB gröſser, als AC, so wäre der Winkel ACB gröſser, als ABC; beides aber streitet mit der Voraussetzung.

§. 61. Wenn in zwei rechtwinklichen Fig. 36.a. Dreiecken ABC, abc, die Seiten, welche einen von den spitzen Winkeln einschlieſsen, einander gleich sind; so sind auch die übrigen bei-

beiden Seiten und die Winkel welche gleichen Seiten gegen über liegen einander gleich.

Man lege das Dreieck abc auf ABC so, daß ab auf AB falle, so fällt der Schenkel bc auf BC, weil die rechte Winkel ABC, abc einander gleich sind, (§. 23.) Fällt nun der Punkt c nicht auf C, sondern oberhalb, so liegt in dem Dreieck aCc die Seite ac dem stumpfen Winkel aCc gegen über, folglich würde ac größer sein als AC (§. 60.) welches nicht möglich ist.

Fiele aber der Punkt c zwischen B und C, so läge in dem Dreieck aCc die Linie AC dem stumpfen Winkel acC gegen über, und wäre also auch größer als ac, (§. 60.); welches nach der Voraussetzung ebenfalls nicht angeht.

Der Punkt c fällt daher auf C und es ist

BC = bc

der Winkel BAC = bac

BCA = bca.

§. 62. In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammen genommen größer, als die dritte. Fig. 37.

Man nehme zwei Seiten, welche man will, AB, AC, verlängere BA und mache AD = AC, so daß BD = BA + AD = BA + AC ist; so ist auch in dem gleichschenklichen Dreieck ACD der Winkel ADC dem Winkel ACD gleich (§. 51.) Es ist also in dem Dreieck BCD der Winkel BCD größer, als der Winkel ACD oder ADC, das ist, BDC; folglich ist auch BD größer, als

BC,

BC, (§. 60.) das will sagen: $AB + BC$ größer als BC.

Fig. 38. §. 63. Wenn daher aus dreien gegebenen Linien A, B, C, ein Dreieck gemacht werden soll, so müssen jede zwei davon zusammen größer sein, als die dritte; nemlich $A+B$ größer, als C, $B+C$ größer, als A, $A+C$ größer als B. Ist diese Bedingung nicht dabei, so läßt sich aus diesen Linien kein Dreieck machen.

§. 64. Diese beiden letzten Sätze scheinen eben von keinem Belange, und nur Hülfssätze zu sein, um das Nachfolgende erweisen zu können; allein sie finden auch ihre Anwendung, wenn man sich ein gutes und richtiges Augenmaaß erwerben will. Ich sehe z. B. zwei Berge B und C; ich befinde mich in A, und will wissen, ob ich weiter von ihnen entfernt bin, als es einer von dem andern ist?

Fig. 39. In dieser Absicht stelle man sich das Dreieck ABC vor. Ist nun BAC ein rechter oder ein stumpfer Winkel; so ist B von C allemal weiter entfernt, als A von eben diesen Punkten. Denn wir haben gesehen, daß in einem Dreieck nur ein rechter, und auch nur ein stumpfer Winkel sein kann, und daß die Seite, welche dem rechten oder stumpfen Winkel gegen über liegt, in allen Fällen die größte ist.

Man stelle sich nun vor, die Tete der feindlichen Kolonnen befinde sich in B, die Tete unserer Kolon-

Kolonnen in A, und beide Armeen begegnen sich auf dem Marsche; in C ist eine Höhe, ein Dorf, oder sonst ein vortheilhafter Posten, dessen sich beide zu bemächtigen suchen. Weiß nun der General den Winkel BAC zu beurtheilen, und findet, daß derselbe größer ist, als der Winkel ABC, oder daß er ein rechter oder stumpfer Winkel ist, so wird er den Posten C allezeit eher, als der Feind, erreichen und besetzen können, wenn das Terrain keine Hindernisse in den Weg legt.

§. 65. Eine Armee steht im Lager AB. Der Feind kommt in schräger Linie CD anmarschirt, um ihr in die Flanke zu fallen. Die Gegend ist eine Ebene, oder mit Hügeln bedeckt, die von keiner Bedeutung sind. Man will aber dessen Entwurf vereiteln und ihn selbst überflügeln. Fig. 40.

In dieser Absicht läßt man die Teten seiner Treffen so nahe heran kommen, bis man sieht, daß der Winkel ABD, den die Tete seiner Kolonne mit der Fronte AD macht, beinahe einem rechten Winkel gleich ist; alsdenn marschirt man links ab, und man wird ihn allemal überflügeln, wenn Front gemacht wird, ohne daß er es ändern kann. Denn wenn er Front macht und gerade ausmarschirt, um uns anzugreifen; so fällt die Linie DF, die auf seiner Front perpendikulär ist, allemal zwischen A und B, und wir überflügeln ihn beständig um den Theil FB.

§. 66. Steht der Feind hingegen fest im Lager AB, und man will ihm im freien Felde die Flanke abgewinnen; so muß man so aufmarschiren, daß die Front des Treffens CD mit den Linien, die man von dem Flügel, der angreifen soll, nach dem Flügel des Feindes ziehen kann, den man zuerst angreifen will, z. B. der Winkel CDB ein spitzer Winkel ist. Denn wenn man alsdenn Front macht, und auf dem Flügel D eine Linie DF perpendikulär auf CD aufrichtet: so fällt der Punkt F, wo sie die verlängerte Linie AB des Feindes durchschneidet, allemal außerhalb des angegriffenen Flügels B. Wenn man daher geradeaus vorwärts marschirt, so wird der Flügel D dem feindlichen Flügel B die Flanke abgewinnen. Fig. 41.

§. 67. Wenn eine Armee rechts oder links mit Kolonnen flügelweise abmarschirt ist, so kann sie leicht so manövriren, daß sie auf der Ebene dem Feinde die Flanke abgewinnt.

Gesetzt der Feind ist in AB aufmarschirt, und seine Stellung so, daß er rechts und links treffenweise abmarschiren kann. Will man ihm nun eine von den Flanken abgewinnen, z. B. die linke, so muß man in verschiedenen Kolonnen CD, EF, u. s. w. rechts abmarschiren, und seinen Marsch so einrichten, daß wenn man von dessen linken Flügel B nach der Tete C der ersten Kolonne CD eine gerade Linie zieht, diese mit der Linie CE, welche durch die Teten unserer Kolonnen gezogen wer- Fig. 42.

werden kann, einen spitzen oder einen rechten Winkel macht. Denn in diesem Falle ist der nebenan liegende Winkel BCG entweder ein stumpfer oder ein rechter Winkel. Wenn man hernach entweder mit Zügen, oder Sektionen zu Sechsen, oder durchs Deployiren in der Linie EC aufmarschirt, so wird man allezeit den Punkt G, wo die verlängerte Linie unseres Treffen die verlängerte Linie des feindlichen Treffens durchschneidet, eher erreichen, als der Feind, wenn alle übrigen Umstände gleich sind; weil die Linie CG allezeit kürzer ist, als die Linie BG.

§. 62. Wenn man indeß gleich den Feind auf einem von seinen Flügeln z. B. auf seinem linken überflügelt, so kann es doch geschehen, daß man beim fortgesetzten Avanziren wieder von dessen rechten Flügel selbst überflügelt wird. Dies geschiehet allezeit, wenn die Linie AG, welche von dem rechten Flügel A auf die angreifende Linie CD perpendikulär gezogen werden kann, außerhalb dem Punkte C oder dem linken Flügel fällt. Um dies zu vermeiden müßte die angreifende Armee eine solche Stellung nehmen, daß die Linie AG entweder durch den linken Flügel C ginge oder zwischen den Punkte C und D fiele. Dies ist nun in der Ausübung zwar nicht ganz unmöglich; es würde aber doch viel Zeit und Mühe erfordern. Um dies zu vermeiden, scheint kein besseres Mittel zu sein, als den linken Flügel während des Avanzi-

Fig. 41.

vens etwas zurück zu halten, wenn der Angriff mit dem rechten Flügel geschehen, und den rechten, wenn der Angriff mit dem linken Flügel geschehen soll, so daß der angreifende Flügel allemal eine kleine Schwenkung links oder rechts macht. Denn dadurch bekommt die angreifende Linie nach und nach eine solche Stellung, daß die perpendikuläre Linie AG zwischen C und D fällt. Auch kann die Ueberflügelung vermieden werden, wenn sich die angreifende Armee, nachdem sie den angegriffenen feindlichen Flügel geschlagen, nachher während des weitern Vorrückens links oder rechts zieht, nachdem der rechte oder linke Flügel den Angriff macht. Ich wiederhole aber noch einmal, daß hier nur von einer Ebene, das will sagen, von einem Terrain die Rede ist, wo eine Armee während des Angriffs keine Höhen, Berge, Gründe, Defileen, Seen und Moräste, Graben, Waldungen ꝛc. antrift.

§. 69. Diese Beispiele sind schon hinreichend, zu zeigen, daß auch ganz unbedeutend scheinende Sachen in der Geometrie ihren Nutzen haben, wenn man sie nur zur rechten Zeit anzuwenden weiß. Je ausgebreiteter die Kenntnisse sind, welche man sich in dieser Wissenschaft erworben, desto besser wird man sich in allen Fällen zu nehmen wissen, wo andre den Kopf verlieren. Man muß indeß nicht bei der bloßen Theorie stehen bleiben, sondern durch eine

eine beständige Anwendung derselben auf verschiedene und besonders verwickelte Fälle sich eine Fertigkeit in der Ausübung zu verschaffen suchen. Theorie und Praxis müssen beständig Hand in Hand mit einander gehen. Allein läuft die Theorie oft Gefahr auszuschweifen und Erscheinungen zu bekommen, die nur in die mögliche, aber nicht in die wirkliche Welt gehören. Der bloße Praktiker hingegen stolpert alle Augenblicke und geräth jedesmal in Verlegenheit, sobald ihm ein Fall aufstößt, der nicht in seinem geometrischen oder kriegerischen A. B. C. Buch aus einander gesetzt ist.

Achte Stunde.

Auflösung einiger Aufgaben.

§. 70.

Von denjenigen, welche sich mit Wissenschaften beschäftigen, ist der Geometer vielleicht der beste Haushalter. So bald er ein Kapital von Wahrheiten gesammlet, es sei so geringe als es wolle, sucht er es gleich anzulegen und davon so hohe Zinsen zu ziehen, als es nur möglich ist. In dieser Absicht geht er fast in alle Wissenschaften; untersucht, wo darin etwas zu verbessern, oder zu erfinden ist; und selten kehrt er zurück, ohne seine Mühe reichlich belohnt zu sehn. In der That haben besonders die mechanischen Künste, die Baukunst, die Schiffahrt, die Erdbeschreibung, und alle physikalische Wissenschaften, der Geometrie die Stufe der Vollkommenheit zu danken, auf der sie sich gegenwärtig befinden; und ist sie gleich nicht die Mutter aller Erfindungen, so ist sie doch größtentheils die Erzieherin derselben, unter deren Aufsicht sie das Rohe und Ungeschliffene ablegen und sich durch Feinheit, Anstand und Würde die Hochachtung der Welt zu verschaffen wissen.

§. 71. Noch sind wir nicht weit in der Kenntniß der Eigenschaften der Figuren gekommen; aber das Wenige, was wir von den Dreiecken im Vorigen angemerkt haben, wird schon hinreichend sein,

einige

einige Fragen zu beantworten, die in den zeichnenden und andern Künsten alle Augenblicke vorkommen; z. B. eine gerade Linie, einen Winkel in gleiche Theile zu theilen, eine Linie auf einer andern perpendikulär oder senkrecht zu ziehn. Dies kann nun zwar öfters dadurch geschehen, daß man so lange herumtappt, bis man durch verschiedene angestellte Versuche seine Absicht erreicht; aber warum soll man diesen beschwerlichen, Mühe und Zeit verderbenden Weg nehmen, wenn man mit Bequemlichkeit geradezu gehen kann, ohne zu befürchten, auf Irrwege zu gerathen? Wir erwählen diesen letztern.

§. 72. **Einen geradelinigten Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.** Fig. 43.

Man nehme auf den Schenkeln des gegebenen Winkels BAC die Linie AE=AD, ziehe DE und beschreibe über DE ein gleichseitiges Dreieck DEF (§. 45.); ziehe AF, so theilt diese Linie den Winkel BAC in zwei gleiche Theile.

Denn in den beiden Dreiecken ADF, AEF ist AD=AE, DF ist der Linie EF gleich gemacht worden, und AF ist die Seite, welche beide Dreiecke gemeinschaftlich haben. Daher sind in den gleichen Dreiecken ADF, AEF die Winkel, welche gleichen Seiten gegen über liegen, das ist, der Winkel DAF oder BAF dem Winkel EAF oder CAF gleich (§. 44.).

§. 73. Es ist eben nicht nöthig, daß man die Linien DE, DF, FE ausziehe; es ist genug, wenn

wenn man den Zirkel in D und E einsetzt, und mit der Eröfnung DE zwei Bogen beschreibt, die sich in F durchschneiden, und hernach die Linie AF zieht.

Fig. 44. §. 74. Eine gerade Linie AB von einer gegebenen Länge in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man beschreibe aus A und B zwei gleiche Cirkel, welche sich in C durchschneiden; ziehe AC, BC und theile den Winkel ACB durch die Linie CE in zwei gleiche Theile, so daß sie die Linie AB in D durchschneidet, so ist diese in zwei gleiche Theile getheilt.

Denn in den beiden Dreiecken ACD, BCD ist AC = BC, CD beiden gemeinschaftlich, und der Winkel ACD dem Winkel BCD gleich gemacht worden; daher ist auch AD = DB. (§. 48.)

Beim wirklichen Zeichnen beschreibt man aus A und B mit der Entfernung AB zwei Cirkelbogen, welche sich in C und E durchschneiden, legt das Lineal an diese Punkte, und bestimmt den Punkt D, wo es die Linie AB durchschneidet; so ist der Theilungspunkt gefunden.

§. 75. Auf einer geraden Linie AB von unbestimmter Länge in einem gegebenen Punkte C eine perpendikuläre oder senkrechte Linie aufzurichten.

Fig. 45. Man nehme auf beiden Seiten des Punkts C die Linie CD = CE. Mit dem Zirkel beschreibe man

man mit einer beliebigen Entfernung aus D und E Bogen, die sich in F durchschneiden; ziehe FC: so ist diese auf AB in C perpendikulär.

Um sich hiervon zu überzeugen, ziehe man DF, EF; so ist in den beiden Dreiecken DCF, ECF, die Linie CF gemeinschaftlich, DF = EF und CD = CE gemacht worden; daher sind auch die Winkel, die gleichen Seiten gegen über liegen, gleich: (§. 54.); also FCD = FCE. Die Linie CF fällt also auf AB dergestalt, daß sie mit derselben auf beiden Seiten gleiche Winkel macht; folglich ist sie darauf perpendikulär. (§ 24.)

§. 76. Auf eine gerade Linie AB von unbestimmter Länge von einem außerhalb derselben gegebenen Punkt C eine Perpendikulärlinie zu ziehen.

Man beschreibe um C einen Cirkelbogen, so daß er AB in D und E durchschneide; ziehe CD, CE, und theile den Winkel DCE durch die Linie CF in zwei gleiche Theile (§. 72.); so ist diese auf AB perpendikulär. Fig. 46.

Weil in den Dreiecken DCF, ECF die Seite CF gemeinschaftlich, CD = CE, und der Winkel DCF = ECF gemacht worden; so ergiebt sich hieraus, (§. 48.); daß auch der Winkel CFD = CFE und also CF auf AB perpendikulär ist. (§. 24.)

§. 77. Beim wirklichen Zeichnen bestimmt man nur aus C mit einer schicklichen Eröfnung des Zirkels die Punkte D und E, setzt hernach den Zirkel in D und E, und beschreibt mit eben der Entfernung Bogen, die sich in G durchschneiden; zieht man nun CG, so ist diese auf AB perpendikulär.

§. 78. Eine Perpendikulärlinie läßt sich auf einer andern ziemlich genau mit dem bloßen Auge ziehen; wenigstens kann man durch einige Uebung bald so weit kommen, daß man dabei nur einen geringen und oft unmerklichen Fehler begeht. Da im Felde verschiedene Fälle vorkommen, wo es nöthig ist, eine Perpendikulärlinie zu ziehen, so sollte man sich fleißig üben, dies mit dem bloßen Auge ohne Beihülfe anderer Werkzeuge und Geräthschaften zu bewerkstelligen.

Fig. 47. Gesetzt, man wollte über einen Fluß eine Brücke schlagen; so muß man die Breite desselben wissen, um die Anzahl der Pontons oder Kähne zu bestimmen, welche dazu erfordert werden. In dieser Absicht suche man auf dem entgegengesetzten Ufer einen Gegenstand A, der deutlich in die Augen fällt, und den man in den meisten Fällen ohne viele Mühe findet, z. B. einen Baum, einen Strauch, oder sonst ein Merkmal, das nicht weit vom Ufer entfernt ist.

Diesseits stelle man sich in einen Punkt C, der nicht weit vom Ufer entfernt ist, und wo man den Gegenstand A deutlich sehen kann. Sodann

ziehe man die Linie CG auf CA perpendikulär und bezeichne sie wie gewöhnlich mit einigen Stäben. Man schreite hierauf von C bis D eine Entfernung ab, die nach dem Augenmaaß beinahe so groß ist, als CA, weil man alsdenn desto weniger der Gefahr ausgesetzt ist, Fehler zu begehen; hat man keine Stäbe, so lasse man einen Menschen auf den Punkt D treten.

Von D schreite man bis E die Linie DE ab, so daß sie der Linie CD gleich sei; bezeichne den Punkt E durch einen Stab oder einen Menschen, ziehe alsdann eine neue Linie EF auf CG perpendikulär und lasse jemanden auf dieser Linie so weit nach F fortgehen, bis er sieht, daß der in D gesetzte Stab oder Mensch den Gegenstand A bedeckt; so ist EF in Schritten die Entfernung des Punktes C von A, und wenn man von dieser die Entfernung des Punkts C von dem Flusse, nemlich CB abzieht, so bekommt man die Breite des Flusses AB.

Denn in den beiden Dreiecken ACD, DEF ist der Winkel EDF dem Winkel CDA gleich, weil beide Scheitelwinkel sind (§. 27.); auch sind die rechten Winkel ACD, DEF einander gleich; und da wir auch CD=DE gemacht haben, so ist auch EF = CA (§. 58.); und daher die Breite des Flusses oder AB = AC—CB, das ist, die Linie EF weniger CB.

§. 79. Dieses kann alles bloß durch das Auge geschehen. Je genauer dabei die Perpendikulärli-

nien

nien getroffen werden, desto geringer ist der Fehler. Bei dem Gebrauch, den man im Felde davon macht, ist dies vollkommen hinreichend. Will man indeß nicht mit dem bloßen Auge zufrieden sein, so kann man auch leicht eine größere Genauigkeit erFig. 48. halten. Alsdenn aber muß man eine Schnur haben, die in zwei gleiche Theile getheilt ist. Wenn man nun auf AB in C eine Linie perpendikulär aufrichten will, so nehme man auf beiden Seiten von C, CD = CE; befestige die Enden der Schnur in E und D, ziehe sie stark an, und setze alsdenn in den mittelsten Punkt derselben F einen Stab, so wird alsdenn CF auf AB perpendikulär sein. Denn hierin folgt man bis auf eine Kleinigkeit der §. 76. gegebenen Vorschrift.

§. 80. **Aus dreien gegebenen Linien, A, B, C, deren jede zwei zusammen größer sind, als die dritte, ein Dreieck zu beschreiben.**

Man ziehe nach Gefallen eine gerade Linie, und nehme darauf AB = A. Mit der Eröfnung Fig. 49. des Zirkels, welche der Linie B gleich ist, beschreibe man aus A, und mit der Eröfnung, welche der Linie C gleich ist, aus B Bogen, welche sich in C durchschneiden: so ist ABC das verlangte Dreieck, welches leicht einzusehen ist. (§. 54.)

Fig. 50. §. 81. **Auf eine gerade Linie ab an einem gegebenen Punkt a einen Winkel zu zeichnen,**

der

der einem andern gegebenen Winkel BAC gleich ist.

Man nehme auf den Schenkeln des gegebenen Winkels nach Gefallen die Punkte D und E an, und ziehe DE; mache sodann ad = AD, und beschreibe aus d mit der Entfernung de = DE und aus a mit der Entfernung ac = AE Bogen, die sich in e durchschneiden, ziehe durch den Durchschnittspunkt e die Linie ac; so ist der Winkel bac dem gegebenen BAC gleich.

Eigentlich hat man auf ab ein Dreieck ade beschrieben, welches dem gegebenen ADE gleich ist (§. 80.); daher denn auch die den gleichen Seiten DE, de gegen über liegende Winkel gleich sind. (§. 54.)

§. 82. Man kann sich diese Arbeit erleichtern, wenn man die Punkte D und E in gleicher Entfernung von A nimmt. Dies ist besonders alsdenn anzurathen, wenn mehrere Winkel, die um einen Punkt A liegen, beim Kopiren, z. B. der Karten abgetragen werden sollen. Z. B. Wenn man verschiedene Winkel BAC, BAF, BAG, BAH, BAI u. s. w., die an einem Punkt A liegen, auf ein andres Blatt bringen soll; so beschreibe man aus A mit einer willkührlichen Entfernung des Zirkels AD einen Zirkel DEF u. s. w. Mit eben der Entfernung ad = AD beschreibe man aus a über ab einen Zirkel def u. s. w. Sodann beschreibe man nach und nach mit den Eröfnungen de = DE; df = DF; dg = DG; dh

Fig. 51.

dh = DH; di = DI u. s. w. Bogen, welche den zuerst beschriebenen Zirkel in e, f, g, h, i u. s. w. durchschneiden; ziehe ae, af, ag, ah, ai; so sind die Winkel dae, daf, dag, dah, dai u. s. w. den Winkeln DAE, DAF, DAG, DAH, DAI u. s. w. gleich. Dies bedarf weiter keines Beweises.

Neunte Grunde.

Die Parallel-Linien.

§. 14.

Wenn im Felde die Frage ist, Verschanzungen anzulegen, und die dazu erforderlichen Brustwehren und Gräben abzustecken; bei Belagerungen Batterien zu bauen; in der großen Befestigungskunst, wo alles mit mehrerer Genauigkeit behandelt werden muß, die Dicke der Wälle, die Breite der Gräben, und überhaupt die Lage der Werke anzudeuten: so kommt es immer darauf an, Linien abzustecken, die mit einander parallel sind.

Man nennt aber Parallellinien gerade Linien, die in einer ebenen Fläche dergestalt fortlaufen, daß sie einander nie begegnen oder durchschneiden,

den, man mag sie auf beiden Seiten so weit verlängern als man will.

§. 84. Wenn zwei gerade Linien AB, CD von einer dritten HI in E und F dergestalt durchschnitten werden, daß die Wechselswinkel AEF, DFE einander gleich sind, so sind sie parallel. Fig. 52.

Wären AB, CD nicht parallel, so müssen sie irgendwo in einem Punkte G zusammen laufen oder sich durchschneiden. Dadurch entstünde aber ein Dreieck EFG, und der äußere Winkel AEF wäre größer als der innere Winkel DFE (§. 55.) Wenn man daher annimmt, die Linien laufen zusammen, so muß man auch zugeben, daß der Winkel AEF dem Winkel DFE gleich und auch zugleich größer ist, als derselbe. Dies aber ist unmöglich; folglich können AB und CD einander nicht durchschneiden, sondern sind wirklich parallel.

§. 85. Wenn zwei gerade Linien AB, CD von einer dritten HI dergestalt durchschnitten werden, daß der äußere Winkel HEB dem innern, auf eben der Seite der Linie HI aber an der andern Linie CD liegenden Winkel DFH gleich ist; so sind die Linien parallel. Fig. 53. 31.

Denn da die Scheitelwinkel einander gleich sind, das ist, da

HEB

HEB = AEF (§. 27.)

oder HEB = DFE nach der Voraussetzung, so ist auch AEF = DFE (§. 14. n. 1.) also die Wechselwinkel gleich, demnach (§. 84.) AB, CD parallel.

§. 86. Auch sind AB, CD parallel, wenn die beiden innern Winkel AEF, CFE die auf einerlei Seite der durchschneidenden Linie liegen zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich sind.

In dem 25. §. ist gezeigt worden, daß zwei auf einer geraden Linie neben einander liegende Winkel zweien rechten Winkeln gleich sind. Im gegenwärtigen Fall ist also

CFE + DFE = 2 R.

und CFE + AEF = 2 R. nach der Voraussetzung. Demnach ist (§. 14. n. 1.)

CFE + DFE = CFE + AEF.

Nimmt man auf beiden Seiten CFE weg, so bekommt man

DFE = AEF. (§. 14.)

Das will sagen: die Voraussetzung, daß die beiden innern Winkel zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich sind, schließt zugleich die Bedingung in sich, daß die Wechselswinkel AEF, DFE einander gleich sind. Daher sind AB, CD auch in diesem Falle parallel. (§. 84.)

§. 87. Wenn zwei Parallellinien AB, CD von einer dritten HI in E und F durchschnitten werden, so scheint daraus auch umgekehrt zu fol-

folgen, daß die Wechselswinkel AEF, DFE einander gleich sind. Ein Metaphysiker würde dies ohne weitre Umstände behaupten; allein der Geometer, der überall die vollkommenste Deutlichkeit und Ueberzeugung verlangt, ist mit dergleichen übereilten Schlüssen keinesweges zufrieden. Daß man aber diesen Schluß nicht sogleich machen könne, läßt sich leicht zeigen. Man behaupte das Gegentheil und sage: wenn zwei Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Wechselswinkel AEF, DFE ungleich, und man wird daraus nichts ungereimtes folgern können. Nur das einzige würde man zugeben müssen, daß durch einen Punkt mehrere Linien mit einer andern parallel gezogen oder gedacht werden können.

Denn gesetzt der Winkel AEF wäre größer als der Winkel DFE, so könnte man bei E einen Winkel LEF machen, der dem Winkel DFE gleich wäre, und alsdenn würde der Schenkel LE, oder wenn er verlängert würde, die Linie LM mit CD parallel sein. Da nun auch AB mit CD parallel ist, so gingen durch E zwei Linien mit CD parallel. Fig. 53.

§. 88. Dieses hat nun nichts widersprechendes an sich. Denn daraus, daß LM mit CD parallel sein soll, folgt weiter nichts, als daß sich diese beiden Linien nicht begegnen oder einander durchschneiden. Und wenn es nicht möglich wäre, durch E mehr als eine gerade Linie mit CD parallel

daß sie einander niemals begegnen oder durchschneiden, so hat dies allerdings etwas dunkles, etwas unbestimmtes an sich. Wir werden daher eine andere Erklärung von den Parallellinien geben müssen.

Zehnte Stunde.

Fortsetzung.

§. 91.

Fig. 54. Wenn zwei gerade Linien AB, CD in einer Ebene dergestalt neben einander fortlaufen, daß sie beständig in allen Punkten einerlei Entfernung von einander behalten, so sind sie mit einander parallel.

Dies ist die gewönliche und ganz einfache Vorstellung die man sich von den Parallellinien macht. Man bekommt dadurch einen sehr deutlichen und richtigen Begrif von dem Parallelsein, aus dem von selbst folgt, daß sie niemals zusammen treffen oder einander durchschneiden können, man mag sie so weit verlängern, als man will.

§. 92. Die Entfernung eines Punktes Fig. 55. C von einer geraden Linie AB, nennt man die gerade Linie CD, welche von dem gegebenen Punkt

Punkt C auf AB perpendikulär gezogen werden kann.

Wenn daher die Linien AB, CD parallellelig. sein sollen, so müssen alle Linien, die von will- 54. kührlich angenommenen Punkten in den Linien AB, CD auf die andere perpendikulär gezogen werden können, einander gleich sein. Nimmt man daher diese Punkte E, G ꝛc. auf der Linie CD, so muß beständig EF = GH sein; nimmt man sie auf AB, nemlich F, H, so muß auch FE = HG sein; und dies muß allezeit Statt finden, man mag diese Punkte annehmen, wo man will.

§. 93. Wenn man sich von der Entstehung dieser Parallellinien einen deutlichen Begrif machen will, so stelle man sich eine gerade Linie MN vor, fig. die in einer Ebene gezogen ist, und auf beiden Sei- 56. ten so weit verlängert werden kann, als man will. Man lasse ferner einen rechten Winkel ABC sich auf dieser Linie MN so fortbewegen, daß der Schenkel AB beständig auf der Linie MN bleibt; so wird der Punkt C des andern Schenkels BC eine gerade Linie beschreiben, die mit der Linie MN parallel ist. Denn der Schenkel AB mag bei dem Fortrücken auf der Linie MN hinkommen, wo er will z. B. in A′ B′ so ist die Entfernung des Punktes C′, auf den der Punkt C fällt, von der Linie MN, nemlich C′ B′ der Linie CB gleich und daher ein jeder Punkt in der Linie welche der Punkt C beschreibt, von MN gleich weit entfernt.

§. 94. Ich glaube nicht, daß jemand zweifeln werde, der Punkt C beschreibe eine gerade Linie. Denn während der Bewegung weicht er auf keiner Seite von seiner Richtung ab, er nähert sich nicht der geraden Linie MN und entfernt sich auch von ihr nicht mehr als die gerade Linie CD beträgt, und hierin besteht eigentlich das Wesen einer geraden Linie.

§. 95. Wenn zwei Punkte C, E, von einer geraden Linie MN gleich weit entfernt sind, so ist die gerade Linie OP, welche durch diese Punkte gezogen oder gedacht werden kann mit MN parallel, oder in allen Punkten von MN gleich weit entfernt, man mag sie so weit verlängern als man will. Fig. 57.

Dies erhellet an sich schon aus der Art wie Parallellinien entstehen. (§. 93.) Will man sich indeß noch deutlicher davon überzeugen, so nehme man an, es wäre möglich, daß man durch die Punkte C, E eine gerade Linie ziehen könnte, z. B. CDE oder CED oder DCE, die nicht in allen Punkten gleich weit von MN entfernt wäre; so ziehe man von den Punkten C, E, die Linien CB, EH auf MN perpendikulär; so sind diese nach der Voraussetzung einander gleich, das ist, $CB = EH$.

Es sei nunmehr D ein Punkt in der Linie, die durch C und E gehen und doch nicht in allen Punkten gleich weit von MN entfernt sein soll. Dieser Punkt sei entweder mehr oder weniger von MN entfernt als der Punkt C und E, so daß, wenn

man

man DF auf MN perpendikulär zieht, diese Linie entweder gröſſer oder kleiner als CB oder EH ist.

Man nehme nun, die Linie DF sei gröſſer als CB oder EH, so kann man ein Stück abschneiden, das so groß ist als CB oder EH. Es sei also FG = CB = EH.

Stellt man sich nun vor, daß sich der rechte Winkel ACB auf der Linie MN fortbewegt, so beschreibt der Punkt C die gerade Linie CC' (§. 93.) und wenn der Schenkel BC bei seinem Fortrücken an den Punkt F kommt, so fällt der Punkt C auf den Punkt G. Dieser Punkt liegt also in der geraden Linie, welche durch die Punkte C und E geht, das ist, in der geraden Linie OP.

Da nun CDE auch eine gerade Linie sein soll, welche durch die Punkte C und E geht, so müßten durch zwei Punkte zwei gerade Linien gehen können, oder, welches einerlei ist, zwei gerade Linien müßten sich in zweien Punkten durchschneiden können; welches nicht möglich ist. (§. 26.)

Eben dies würde folgen, wenn man annehmen wollte, DF wäre kleiner als CB oder EH.

§. 96. Wenn die Linien MN, OP parallel, das ist, in allen Punkten gleich weit von einander entfernt sind, und man zieht von einem Punkt C in der Linie OP die Linie CA auf MN perpendikulär; so ist sie auch in C auf OP perpendikulär. Fig. 58.

Wäre AC nicht auf OP perpendikulär und daher ACP kein rechter Winkel; so ziehe man AD auf OP und von D die Linie DB auf MN perpendikulär; so liegt AC in dem Dreieck ACD dem rechten Winkel gegen über und ist daher größer als AD (§. 61.) In dem Dreieck ABD, das bei B einen rechten Winkel hat, liegt wieder AD dem rechten Winkel gegen über und ist daher größer als BD.

Weil nun AC schon größer ist als AD, so ist AC um so mehr größer als DB. Nach der Voraussetzung ist aber AC = DB. Wäre daher die Linie AC nicht auf OP perpendikulär, so würde die Linie AC zugleich größer als DB und auch der Linie DB gleich sein können. Dies widerspricht sich aber; daher muß schlechterdings AC auf OP auch perpendikulär sein.

§. 97. Wenn die Linien AC, BD auf AB perpendikulär und einander gleich sind; so ist auch die gerade Linie CD, welche zwischen den Punkten C und D eingeschlossen ist, der Linie AB gleich. Fig. 59.

Denn weil AC = BD so ist CD mit AB parallel (§. 95.); folglich ACD, BDC rechte Winkel (§. 96.)

Man ziehe die Linien AD, BC; so ist BC = AD; weil in den beiden Dreiecken ABC, ACD die Winkel BAC, ABD rechte Winkel sind, und AB = CD, AC = BD (§. 48.)

In

In den beiden rechtwinklichen Dreiecken ABC, ACD sind also die Seiten, welche die spitzen Winkel ACB, CAD einschließen, einander gleich, nemlich AC = AC; AD = BC, folglich ist auch CD = AB (§. 61.)

§. 98. In einem rechtwinklichen Dreieck ABC sind die Winkel ABC, BAC, ACB zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich. Fig. 60.

Man ziehe DA auf AC perpendikulär, mache AD = BC und ziehe DC; so ist DC = AB (§. 97.)

Die beiden Dreiecke ABC, ADC sind also einander gleich; weil AB = DC, BC = AD und beide die Seite AC gemein haben. (§. 54.) Daher sind auch die gleichen Seiten gegen über liegenden Winkel einander gleich, nemlich

ADC = ABC ein rechter Winkel
ACB = DAC
CAB = DCB.

Demnach ist auch ACB + CAB = DAC + CAB (§. 14. n. 2.)

Weil nun DA auf AB perpendikulär ist, so ist der Winkel DAB ein rechter Winkel; folglich da DAB = DAC + CAB, so ist die Summe der beiden Winkel DAC + CAB einem rechten Winkel gleich. (§. 14. n. 2.)

DAC + CAB = R.

Da nun aber DAC = ACB so ist (§. 14. n. 1.)

ACB + CAB = R.

Weil nun ABC = R (§. 24.)

so ist ACB + CAB + ABC = 2 R. (§. 14. n. 2)

§. 99. In einem jeden Dreieck ABC sind die drei Winkel ABC, BAC, ACB zusammengenommen zweien rechten Winkeln gleich.

Fig. 61.

Man ziehe von der Spitze C des einen Winkels, und wenn das Dreieck stumpfwinklich ist, von der Spitze C des stumpfen Winkels, die Linie CD perpendikulär auf die gegen über liegende Seite AB; so wird dadurch das Dreieck ABC in zwei rechtwinklichte ADC, BDC getheilt. Es ist also nach §. 98

DAC + DCA + ADC = 2 R.

DBC + BCD + BDC = 2 R.

Demnach

weil ADC = BDC = R

DAC + DCA + R = 2 R.

DBC + BCD + R = 2 R.

folglich DAC + DCA = R.

DBC + BCD = R.

und wenn man diese Größen auf beiden Seiten zusammen setzt

DAC + DBC + ACD + BCD = 2 R.

Es ist aber die Summe der Winkel ACD, BCD dem Winkel ACB gleich. Das ist,

ACD

ACD + BCD = ACB

Demnach ist

DAC + DBC + ACB = 2 R.

oder BAC + ABC + ACB = 2 R. (§. 114. n. 1 und 2.)

§. 100. Wenn man in einem Dreieck ABC eine Seite z. B. AB bis D verlängert, so ist der äußere Winkel CBD den beiden innern ihm gegen über liegenden Winkeln CAB, ACB zusammen genommen gleich. Fig. 62.

Es ist ABC + ACB + BAC = 2 R.

Will nun aber auch ABC + CBD = 2 R.

so ist ABC + ACB + BAC = ABC + CBD.

Nimmt man auf beiden Seiten den Winkel ABC weg, so bleibt

ACB + BAC = CBD.

§. 101. Diese Eigenschaft der Dreiecke ist von der größten Wichtigkeit. Sie erspart uns die Mühe alle Winkel zu messen, weil man nur die Summe zweier Winkel von zweien rechten Winkeln abziehen darf, um den dritten zu bekommen. Dies kann sowohl durch das Zeichnen, als durch Berechnung geschehen, wie man in der Folge sehen wird, wenn wir die Art, das Maaß eines Winkels zu finden, näher werden bestimmt haben. Es folgt übrigens hieraus auch das, was wir schon oben (§. 46 u. 57.) gesehen haben, daß in einem rechtwinklichen Dreieck nur ein

rech-

rechter Winkel; in einem stumpfwinklichen nur ein stumpfer Winkel sein kann, die übrigen aber spitze Winkel sind.

102. Es erhellet ferner hieraus, daß von dem Fig. 63. Punkt C (§. 76. Fig. 46.) nur eine Perpendikulärlinie auf AB möglich ist.

Denn könnte man noch eine andre CE auf AB ziehn, so wären in dem Dreieck CDE die Winkel CDE, CED rechte Winkel; welches nicht möglich ist. (§. 101.)

§. 103. Es ist ferner die Linie CD, welche von einem außerhalb der Linie AB liegenden Punkt auf dieselbe perpendikulär gezogen Fig. 63. werden kann, die kürzeste von allen, die vom C nach einem Punkt in der Linie AB gezogen werden können. Denn alle übrigen liegen in den dadurch entstehenden Dreiecken dem rechten Winkel gegen über und sind daher allezeit größer als CD. (§. 60.)

§. 104. Daß in einem Punkt C in einer Fig. 64. geraden Linie nur eine perpendikulärlinie aufgerichtet werden kann, bedarf beinahe keines Beweises. Denn wären FC, GC in C auf AB perpendikulär, so wäre

$$GCB = R$$
$$FCB = R$$

Demnach $GCB = FCB$.

der größere Winkel dem kleinern gleich; welches ein offenbarer Widerspruch ist.

Eilfte

Eilfte Stunde.

Fortsetzung.

§. 105.

Nunmehr sind wir im Stande, die Eigenschaften der Parallellinien mit der gröſsten Schärfe zu beweisen.

Wenn nemlich zwei gerade Linien AB, CD parallel oder in allen Punkten gleich weit von einander entfernt sind, und sie werden von einer dritten geraden Linie EF in G und H durchschnitten, so sind Fig. 65.

1) Die Wechselswinkel EHB, FGC einander gleich.

2) Ist der äuſsere Winkel EGD dem innern auf eben der Seite der Linie EF liegenden Winkel EHB gleich.

3) Sind die beiden innern auf eben der Seite der Linie EF liegenden Winkel GHB, HGD zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich.

Man ziehe von den Durchschnittspunkten G und H die Linie GI auf AB und HK auf CD perpendikulär; so sind auch IG auf CD und KH auf AB in G und H perpendikulär (§. 96.)

Weil

Weil nun aber auch AB, CD parallel sind, so ist

HK = GI. §. 91.

und KG = HI. §. 97.

In den beiden Dreiecken GHI, KGH sind demnach die Seiten einander gleich, weil die Seite GH sowohl zu dem einen als zu dem andern gehört; folglich sind auch die gleichen Seiten gegenüber liegende Winkel gleich (§. 54.) das ist,

1) KGH oder CGH = GHI = GHB.

Weil ferner CGH = EGD. §. 27.

so ist auch 2) EGD = EHB (§. 14. n. 1.)

Endlich sind die beiden neben einander liegenden Winkel EGD, HGD zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich. (§. 28.)

EGD + HGD = 2 R.

Folglich da EGD = EHB §. 14. n. 2.

so ist auch 3) EHB + HGD = 2 R. (§. 14. n. 1.)

§. 106. Eben so läßt sich auch der bereits oben §. 84. angeführte Satz beweisen.

Wenn zwei gerade Linien AB, CD von einer dritten EF in G und H dergestalt durchschnitten werden, daß

1) Die Wechselswinkel CGF, EHB einander gleich sind.

Fig. 65. 2) Der äußere Winkel EGD dem innern EHB gleich ist.

3) die

3) Die beiden innern Winkel DGH, GHB zusammengenommen zweien rechten Winkeln gleich sind;

so sind die Linien AB, CD mit einander parallel oder stehen in allen Punkten gleich weit von einander ab, man mag sie so weit verlängern als man will.

Man ziehe GI auf AB, und HK auf CD perpendikulär, so ist in den beiden rechtwinklichen Dreiecken GHI, GKH den Winkel

$$HIG = HKG$$

weil beide rechte Winkel sind,

und $GHI = HGK$

weil sie Wechselswinkel, und diese nach der Voraussetzung gleich sind.

Da nun beide Dreiecke die Seite GH gemein haben, so ist nach (§. 59.) $KH = GI$.

Es muß nunmehr noch bewiesen werden, daß KH auch auf AB perpendikulär ist. Dies ist aber leicht. Denn in dem rechtwinklichen Dreieck KGH ist die Summe der beiden Winkel KGH, KHG einem rechten Winkel gleich (§. 98.) oder

$$KGH + GHK = R.$$

weil nun nach der Voraussetzung $KGH = GHB$ ist, n. 1.

so ist auch $GHB + GHK = R.$

das ist $KHB = R.$

demnach KH auch auf AB perpendikulär.

Es ist aber auch KH = GI, wie schon erwiesen worden, daher sind die beiden Punkte G und K in der Linie CD von AB gleich weit entfernt; folglich ist CD mit AB parallel. (§. 95.)

Das übrige wird eben so wie §. 85 und 86 bewiesen.

Fig. 66. §. 107. **Wenn zwei gerade Linien AB, CD mit einer dritten EF parallel sind; so sind sie auch mit einander selbst parallel.**

Man ziehe eine gerade Linie GL, welche diese Linien in H, I, K durchschneidet, so ist nach (§. 105.)

der Winkel GHB = GKF
und GID = GKF.

Folglich ist auch der Winkel GHB = GID, §. 14. n. 1.

Bei den Linien AB, CD ist also der äußere Winkel dem innern gleich und daher sind sie mit einander parallel. (§. 106.)

Fig. 67. §. 108. **Wenn zwei gerade Linien AB, CD auf einer dritten perpendikulär sind, so sind sie mit einander parallel.**

Denn in diesem Falle ist der äußere Winkel DCN dem innern BAN gleich, weil beide rechte Winkel sind, folglich ꝛc. (§. 106.)

§. 109. **Durch einen gegebenen Punkt C mit AB eine Parallellinie zu ziehen.**

Man nehme auf AB nach Gefallen einen Fig. 68. Punkt D an und ziehe DC. Bei C mache man den Winkel ECD dem Winkel CDB gleich, (§. 81.)

ziehe

ziehe EC und verlängere sie auf beiden Seiten so weit als man will, so ist EF mit AB parallel, weil die Wechselswinkel ECD, CDB gleich sind. (§. 106.)

§. 110. Wenn man auf dem Felde mit einer gegebenen geraden Linie AB eine Linie CD parallel ziehen oder abstecken soll; so darf man nur in zweien Punkten F und H Perpendikulärlinien aufrichten und FE = GH machen, so ist die Linie, welche durch die Punkte E und G geht, mit AB parallel. (§. 95.) Fig. 54.

Man wird bei diesem Falle sehr wohl thun, wenn man die Punkte F und H so weit von einander entfernt nimmt, als es die Gegend und die Umstände erlauben; weil alsdenn die Fehler, welche entstehen, wenn man die Linie FE der Linie GH nicht vollkommen gleich macht, keinen so großen Einfluß auf das Parallelsein der Linien AB, CD haben, als wenn die Punkte F, H nicht weit von einander liegen.

§. 111. Wenn man beim Zeichnen auf dem Papiere Parallellinien ziehen will, so bedient man sich eines Lineals AB, und rechtwinklichen Dreiecks CDE, die man von einem Tischler von gutem trocknen Eben Linden- oder Ahornholz verfertigen läßt. Das Dreieck muß aber sehr genau rechtwinklich sein.

Wenn man nun mit einer auf dem Papiere gegebenen geraden Linie MN durch einen Punkt F eine gerade Linie parallel ziehen soll; so legt man Fig. 69. 70.

das Dreieck CDE an die Linie MN genau an und so daß die gröste Seite EC genau auf die Linie MN fällt. Hierauf schiebt man das Lineal AB an die Seite DE, drückt es an, hält es fest und schiebt das Dreieck ECD so lange an dem Lineal auf- oder abwärts, bis die Seite EC durch den Punkt F geht. Man hält alsdenn das Dreieck fest, damit es sich nicht verschiebe und zieht die Linie E′ G′ F mit Bleistift oder Tusch; so ist diese mit MN parallel. Denn der Winkel FE′ D′ ist nach diesem Verfahren dem Winkel CED, das ist, der äußere dem innern gleich, folglich (§. 106.) ∝.

Fig. 71. §. 112. Wenn zwei gerade Linien AB, CD parallel und einander gleich sind; so sind auch die Linien welche durch die auf einerlei Seite liegenden Endpunkte gehn, einander gleich und parallel.

Man ziehe BD so ist der Winkel

$$ABD = BDC \quad (\S.\ 107.)$$

In den beiden Dreiecken ABD, BDC ist aber auch nach der Voraussetzung

$$AB = CD$$

und $$BD = BD$$

weil diese Seite sowohl zu dem einen als zum andern gehört, daher ist (§. 48.) AD = BC und ADB = DBC folglich sind auch AD, BC parallel. (§. 106.)

Fig. 72. §. 113. Wenn zwei gerade Linien die mit einander parallel sind, von zweien andern die ebenfalls parallel sind, in A, B, C, D durch-

durchschnitten werden; so sind die Theile die zwischen zweien Parallellinien einander gegen über liegen einander gleich: nemlich

AB = CD
AC = BD

Denn wenn man BC zieht so sind die Winkel

ABC = BCD
ACB = CBD.

(§. 105.) weil AB, CD und AC, BD parallel sind. Die Seite BC aber haben beide Dreiecke ABC, BCD gemein; daher sind auch die Seiten, die in beiden gleichen Winkeln gegen über liegen, einander gleich. (§. 59.)

§. 114. Eine gegebene gerade Linie AB in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen. Fig. 73.

Man ziehe durch A eine gerade Linie AC so, daß sie mit AB einen Winkel einschließt. Auf AC setze man von A bis C so viel gleiche Theile AD = DE = EF = FG = GC ꝛc. als man verlangt, ziehe hierauf die äußersten Punkte B, C zusammen und durch die übrigen Theilungspunkte D, E ꝛc. gerade Linien mit BC parallel, welche AB in d, e, f, ꝛc. durchschneiden, so wird dadurch AB in eben so viel gleiche Theile getheilt.

Um dies zu beweisen, ziehe man die Linien dH, eI, fK, gL mit AC parallel; so ist dH = DE; eI = EF, fK = FG; gL = GC; weil Dd, Ee ꝛc. parallel sind (§. 112.)

Weil nun aber auch DE = AD = EF = ꝛc. so ist auch dH = eI = fK = gL (§. 14. n 11.). In den Dreiecken ADd, dHe, eIf ꝛc. sind aber alle Winkel einander gleich, weil die Linien Dd, Ee ꝛc. unter sich und dH, eI ꝛc. mit AC parallel sind, nemlich

AdD = deH = eIf ꝛc. = gBL

und ADd = dHe = eIf ꝛc. = gLB

(§. 105.) Folglich sind auch die Dreiecke selbst und die gleichen Winkeln gegen über liegende Seiten einander gleich, nemlich

Ad = de = ef = fg = gB ꝛc. (§. 89.)

und die Linie AB wird auf diese Art in eben so viel gleiche Theile getheilt, als die Linie AC enthält, das will sagen, in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

Zwölfte Stunde.

Gebrauch dieser Lehrsätze in der Taktik.

§. 115.

Die Wissenschaft, Truppen jeder besondern Absicht angemessene und entsprechende Bewegungen machen zu lassen, oder nach Maaßgabe des Terrains und der Stellung des Feindes zu manövriren, ist einer der wichtigsten Theile der Kriegskunst, und in gewissem Betracht die Grundlage derselben. Bataillone, Regimenter und ganze in verschiedenen Treffen gestellte Armeen sind zwar keine Linien, so wie man sie auf dem Papiere zieht; indeß kann man doch nicht umhin, sie als Linien zu betrachten, und wirklich lassen sich bei dieser Voraussetzung die Gesetze, nach den sie sich bei ihren Bewegungen richten müssen, sehr genau und richtig bestimmen. Ein Geometer, der sich ohne jemals Soldat gewesen zu sein, plötzlich an der Spitze eines Regiments gesetzt fände, würde freilich eine sehr traurige Figur machen, und mit aller seiner Theorie den Kopf verlieren. Man lasse aber diesen Geometer nach und nach die verschiedenen Stufen des Militärstandes betreten, damit er Gelegenheit bekomme, militärische Bewegungen und das Eigenthümliche derselben kennen zu lernen, und durch die Erfahrung mit den dabei vorkommenden besondern Fällen bekannt zu werden; so wird er

Weil nun aber auch DE = AD = EF = ꝛc. so ist auch dH = eI = fK = gL (§. 14. n 11.), In den Dreiecken ADd, dHe, eIf ꝛc. sind aber alle Winkel einander gleich, weil die Linien Dd, Ee ꝛc. unter sich und dH, eI ꝛc. mit AC parallel sind, nemlich

AdD = deH = eIf ꝛc. = gBL

und ADd = dHe = eIf ꝛc. = gLB

(§. 105.) Folglich sind auch die Dreiecke selbst und die gleichen Winkeln gegen über liegende Seiten einander gleich, nemlich

Ad = de = ef = fg = gB ꝛc. (§. 59.)

und die Linie AB wird auf diese Art in eben so viel gleiche Theile getheilt, als die Linie AC enthält, das will sagen, in die verlangte Anzahl gleicher Theile.

Zwölfte

Zwölfte Stunde.

Gebrauch dieser Lehrsätze in der Taktik.

§. 115.

Die Wissenschaft, Truppen jeder besondern Absicht angemessene und entsprechende Bewegungen machen zu lassen, oder nach Maaßgabe des Terrains und der Stellung des Feindes zu manövriren, ist einer der wichtigsten Theile der Kriegskunst, und in gewissem Betracht die Grundlage derselben. Bataillone, Regimenter und ganze in verschiedenen Treffen gestellte Armeen sind zwar keine Linien, so wie man sie auf dem Papiere zieht; indeß kann man doch nicht umhin, sie als Linien zu betrachten, und wirklich lassen sich bei dieser Voraussetzung die Gesetze, nach den sie sich bei ihren Bewegungen richten müssen, sehr genau und richtig bestimmen. Ein Geometer, der sich ohne jemals Soldat gewesen zu sein, plötzlich an der Spitze eines Regiments gesetzt fände, würde freilich eine sehr traurige Figur machen, und mit aller seiner Theorie den Kopf verlieren. Man lasse aber diesen Geometer nach und nach die verschiedenen Stufen des Militärstandes betreten, damit er Gelegenheit bekomme, militärische Bewegungen und das Eigenthümliche derselben kennen zu lernen und durch die Erfahrung mit den dabei vorkommenden besondern Fällen bekannt zu werden; so wird es

als General sich bald durch das Hervorstechende, Schnelle und Zweckmäßige in seinen Manövern auszeichnen. Er wird in den verwickeltsten Fällen bald Mittel finden seine Truppen aus einer Abtheilung in die andre übergehen zu lassen, und indem er die Grundsätze der Kriegskunst mit der Geometrie verbindet, bald entscheiden in wie fern die theoretische Genauigkeit in Rücksicht auf das Terrain, auf Zeit und andre Umstände erreicht werden kann oder nicht. Weil auch durch die Geometrie sein Kopf zur Ordnung im Denken gebildet und seine Vorstellungskraft viel Gegenstände auf einmal zu fassen gewöhnt wird, so wird er seinen Unterbefehlshabern die zu dieser Absicht nöthigen Befehle mit der gehörigen Deutlichkeit und Bestimmtheit ertheilen, und mit einem Blick sowohl den Entwurf als die Ausführung desselben übersehen können.

§. 116. Es ist hier der Ort nicht eine Zergliederung der Grundsätze der Taktik vorzunehmen. Ich will blos durch einige Beispiele zeigen, wie man die Grundsätze der Geometrie auf die Mechanik des Krieges anwenden, und mit der gehörigen Einschränkung anwenden muß, ohne dabei in das Pedantische zu fallen.

Wenn eine Linie Infanterie oder Kavallerie, es sei ein Bataillon, ein Regiment, oder ein ganzes Treffen zwischen den Richtungspunkten A, B, aufmarschirt ist, und nunmehr gerade vorwärts avanziren soll, so besteht das Schöne und Zweckmäßige

Fig. 74.

mäßige dieser Bewegung darin, daß indem das Treffen bei dem Fortrücken nach und nach in die Stellungen A′ B′, A″ B″ u. s. w. übergehe, es beständig mit der ursprünglichen Stellung AB parallel bleibe, ohne daß ein Gedränge, Auseinanderziehen (oder Lücken wie man sie nennt) entstehe, und das Intervall zwischen den Bataillonen verlohren gehe.

Sollen diese Bedingungen erfüllt werden, so müssen erstlich alle Bataillone, wenn sie eine gewisse Zeit, z. B. eine, zwei, drei ꝛc. Minuten avanzirt sind, sich allemal zugleich in der Linie A′ B′, A″ B″ ꝛc. befinden, das will sagen, sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen. Zweitens, müssen diese Linien in der sich die Bataillone nach Verfließung einer gewissen Zeit befinden, in allen Punkten gleich weit von der ersten Linie entfernt sein. 3) Da auch kein Gedränge oder Oeffnen entstehen und kein Intervall verlohren gehen soll, so müssen die Bataillone während des Avanzirens keinen größern Raum als bei der ersten Stellung AB einnehmen, das will im strengsten Verstande sagen, sich weder rechts noch links ziehen und einmal wie das andre geschlossen bleiben. Die Frage ist nun, ob und wie diese Bedingungen erfüllt werden können, und wenn dies, wie gewöhnlich, nicht vollkommen geschehen kann, wie man dieser verlangten Genauigkeit so nahe kommen kann, als es das Terrain und die Umstände erlauben?

§. 117. Die beiden ersten Bedingungen zeigen die Nothwendigkeit den Soldaten zu einem gleichförmigen Schritt zu gewöhnen, und ihn zu üben in einer gewissen Zeit z. B. in einer Minute eine gewisse Anzahl gleich großer Schritte zu machen, z. B. 77. Die Größe dieses Schritts muß aber so angenommen werden, daß ihn sowohl der große als kleine Soldat mit Bequemlichkeit machen kann. Wenn denn nun jeder Soldat in der Linie AB nicht allein gleich groß, sondern auch in gleicher Zeit gleich viel Schritte macht, so bleiben offenbar die Linien A′ B′, A″ B″ während der Bewegung mit der ersten Stellung AB parallel.

Damit aber auch die dritte Bedingung erfüllt werde, so müssen alle Bataillone gerade aus marschiren, das will eigentlich sagen, jeder einzelne Soldat, er sei Officier, Unterofficier oder Gemeiner, muß während des Avanzirens in einer Linie fortgehen, die auf der ersten Stellung AB perpendikulär ist. Denn wenn dies geschieht, so behalten nicht allein jeder Soldat, sondern auch alle Bataillone, es mögen noch so viele sein, während des Avanzirens beständig einerlei Entfernung von einander, und es entsteht kein Gedränge, kein Oefnen.

§. 118. Es ist bei dieser Bewegung eingeführt, daß zwei Fahnen vor der Mitte des Bataillons vortreten, damit die Leute einen gewissen Punkt haben, nach dem sie sich richten können. Diese Methode ist gut und wenn diese Fahnen

nen C, D, E, F ꝛc. in Linien Cc, Dd, Ee, Ff, formiarschiren die auf der ersten Stellung AB perpendikulär sind, so behalten sie, während der Bewegung beständig einerlei Entfernung von einander, und wenn ihnen die Bataillone mit einem gleichförmigen Schritte folgen, so wird doch wenigstens, wenn Halt! gemacht wird, ein jedes Bataillon im Ganzen sein Terrain behalten, und die kleine Abweichung die etwa entstehen könnte, bald abgeholfen werden können.

§. 119 Die Fahnen müssen daher während des Avanzirens nicht nur beständig in einer geraden Linie marschiren, sondern diese Linie, in der sie sich fortbewegen, muß auch auf die ursprüngliche Stellung AB perpendikulär sein. Uebrigens ist es eben nicht nöthig, daß die Fahnen C, D, E, ꝛc. selbst unter sich in einer geraden Linie bleiben, ob es gleich gut ist, wenn es geschieht und die Linie, welche durch die Punkte C, D, E ꝛc. geht, zugleich mit der ersten Stellung AB parallel ist.

§. 120. Daß die Linien Cc, Dd, Ee in den die Fahnen vormarschiren sollen, auf der ersten Stellung AB und nicht blos auf die Fronte des Bataillons perpendikulär genommen werden, ist schlechterdings nothwendig.

Wenn alle Bataillone ganz genau in der Linie AB stünden, so würde es gleichgültig sein, ob die Linien Cc, Dd ꝛc. auf der Linie AB, oder auf der Fronte des Bataillons per-

pendikulär wären. Allein es ist selten, und vielleicht im strengsten Verstande unmöglich, eine etwas große Anzahl Bataillone zwischen zweien Punkten A und B so zu richten, daß die Linie AB gerade das erste Glied berührt, oder durch die Schultern aller Mannschaften im ersten Gliede geht; wenigstens würde dazu die Zeit in Gegenwart des Feindes zu kurz seyn, und doch sollte von rechtswegen jede militärische Anstalt und Bewegung so eingerichtet werden, daß sie sich eben so gut vor dem Feinde als auf dem Exerzierplatz ausführen ließe. Nimmt man nun die Linien Cc, Dd, ꝛc. nun auf der Fronte des Bataillons perpendikulär, so mögen die Fahnen und das Bataillon das ihnen folgt auch noch so gerade marschiren, so kann doch in der ganzen Linie ein Drängen und Oefnen entstehen, ohne daß der Fehler an den Fahnen, oder an dem Bataillon liegt.

§. 121. Wir wollen z. B. annehmen, der rechte Flügel eines Bataillons M und der linke Flügel des Bataillons N ständen in der Linie AB, in der das Treffen aufmarschirt ist, etwas zurück, so daß beide einen eingehenden Winkel machen. Zieht man nun auf der Fronte dieser Bataillone die Linien Mm, Nn, perpendikulär, so neigen sich diese gegen einander und werden sich, wenn sie verlängert werden, durchschneiden. Gesetzt nun, die Fahnen marschiren auch in diesen Linien ganz gerade fort, so wird doch bald das Intervall zwischen

Fig. 75.

schen diesen Bataillonen verlohren gehn und ein Gedränge entstehen. Stünden aber der rechte Flügel des Bataillons M und der linke des ihm rechter Hand stehenden Bataillons N vor, so daß beide einen hervorspringenden Winkel machten, so würden die auf der Front der Bataillone perpendikulär gezogenen Linien Mm, Nn, sich immer mehr von einander entfernen, je weiter die Bataillone fortrücken; folgten nun die Bataillone den Fahnen auch noch so gut, so würde das Intervall zwischen diesen Bataillonen nach und nach immer größer werden, und eine Oefnung entstehen, die man nicht gut heißen könnte. Geschieht nun dies bei mehrern in der Linie stehenden Bataillonen, so ist leicht einzusehen, daß dadurch nach und nach eine schwankende, hin und her prellende, vollkommen wellenförmige Bewegung und zuletzt eine völlige Verwirrung im Ganzen entstehen muß. Fig. 76.

Eben dies wird auch der Erfolg sein, wenn die Kommandeure der Bataillone die Linien, in den die Fahnen marschiren sollen nicht genau perpendikulär auf die Stellung AB nehmen, in der die Linie oder das Treffen zuerst aufmarschirt ist. Das Avanziren der ganzen Linie wird alsdenn um so schlechter ausfallen, je größer der Fehler ist, den sie dabei begehen, wenn gleich das Bataillon das sie führen, für sich selbst noch so gut marschirt und avanzirt. In diesem Falle und in den mehresten im Kriege aber muß man auf das Gan-

Ganze und nicht blos auf einzelne Theile sehen.

§. 1122. Die Linie, in der die Fahnen vormarschiren sollen, muß daher auf die ursprüngliche Stellung AB und nicht blos auf auf die Fronte des Bataillons perpendikulär genommen werden. Das gute Avanziren eines Bataillons hängt also erstlich von der Sorgfalt ab, welche die Kommandeure der Bataillone anwenden, auf der Linie AB, in der das Treffen aufmarschirt ist, genaue Perpendikulärlinien zu ziehen und die Fahnen in diese Linie zu stellen; zweitens, von der Aufmerksamkeit, welche die Fahnen anwenden, während des Avanzirens beständig in dieser Linie zu bleiben. Das erste ist gemeiniglich so schwer nicht und man kommt durch einige Uebung bald so weit, daß man mit dem bloßen Auge auf eine gegebene gerade Linie eine Perpendikulärlinie ziehen kann; allein das Geradeaus marschiren in dieser Linie ist in der That etwas schwer. Denn wenn gleich der Kommandeur diese Linie gut genommen und die Fahnen darin gestellt hat, so müssen diese doch auch gewisse feste Punkte haben, welche die Richtung bestimmen die sie nehmen sollen. Ein Punkt ist aber zur Bestimmung einer Linie nicht hinreichend, wie wir oben §. 4. gesehen haben; es müssen wenigstens zwei Punkte sein, wenn man nicht von der Linie in der man fortgehen will, seitwärts abweichen soll. Wo sind aber diese Punkte auf einem

einem Terrain, das nicht reich an hervorstechenden Gegenständen ist, für jedes Bataillon allemal in der Geschwindigkeit zu finden?

§. 123. Gesetzt aber auch ein oder das andre Bataillon hätte zwei dergleichen Punkte, welche die Linie in der die Fahnen marschiren sollen, auf das genauste bestimmen; so würde dies doch im Ganzen von keinem Nutzen sein, wenn nicht die übrigen Bataillone eben dergleichen Punkte für ihre Fahnen hätten. Denn da sich zur Erhaltung des Zusammenhanges ein Bataillon nach dem andern richten muß, so würde das Bataillon, dessen Fahnen die erforderlichen Richtungspunkte haben, doch bald genöthigt sein sie zu verlassen, sobald sich die übrigen Theile der Linie rechts oder links zögen oder mit Gewalt auf dasselbe zudrängten. Die Fahnjunker und Feldwebel müssen daher sehr fleißig und sorgfältig geübt werden, geradeaus zu marschiren, damit ihnen das In einer geraden Linie bleiben nach und nach mechanisch werde. Um darin die gehörige Fertigkeit zu bekommen, müssen sie mit kleinen Entfernungen anfangen; z. B. nach einem Punkt, den sie vor sich in einer gewissen Weite annehmen, 50 bis 100 Schritte geradeaus zu gehen suchen ohne auf der einen oder der andern Seite abzuweichen; jedesmal wenn sie diesen Weg zurückgelegt haben, nachsehen, was sie für Fehler begangen und solche durch eine nochmalige Wiederholung zu verbessern suchen. Haben sie sich bei kleinen Entfernungen hinlänglich geübt,

so können sie allmählich größere von 3, 4, 500 bis 1000 und 2000 Schritte nehmen, und es durch eine fleißige Uebung dahin zu bringen suchen, daß die Fehler, welche sie begehen, immer geringer werden, und zuletzt in keine Betrachtung kommen. In allen Wissenschaften und Künsten macht man durch die Uebung zuletzt Dinge möglich die anfänglich dem Lehrling unmöglich zu sein scheinen. Warum sollte dies auch nicht im Soldatenstande geschehen können? Haben alle Fahnjunker und Feldwebel in dem in einer Geraden Linie Marschiren die gehörige Fertigkeit erlangt, so werden eine Menge Fehler wegfallen die öfters gemacht werden, und wenn denn nun die Kommandeure die Fahnen richtig stellen, so wird man von einer Linie, sie mag aus noch so vielen Bataillonen bestehen, sagen können, daß sie gut avanzirt.

§. 124. Wenn zwei Treffen AB, CD eine sogenannte Schwenkung um die Axe machen sollen, und der Punkt E, um den das zweite Treffen schwenken soll, gerade hinter dem Punkt F genommen wird, um den das erste Treffen eben diese Bewegung macht; so kommen die Treffen durch die Schwenkung um so näher an einander, je größer die Schwenkung ist, und wenn eine Viertelschwenkung gemacht wird, so stoßen sie vollkommen aneinander. Ueberdies überflügelt nach vollbrachter Schwenkung auf dem einem Flügel das erste Treffen das zweite und auf dem andern das zweite Treffen das erste.

Ich habe gesehn, daß dies einige Officiere dergestalt befremdete, daß sie glaubten, es müßten bei der Schwenkung grobe Fehler vorgegangen sein; allein dies folgt ganz ungezwungen aus der Natur der Parallellinien. Denn wenn AB, CD indem sie sich um die Punkte F und E drehen, in die Lage A′ B′, C′ D′ kommen und mit einander wirklich noch parallel sind, so ist die Linie EG, die man von dem Schwenkungspunkt E im zweiten Treffen auf die Linie A′ B′ oder auf das erste Treffen perpendikulär ziehen kann, das will sagen, die gegenwärtige Entfernung des zweiten Treffens vom ersten beständig kleiner als EF oder die erste Entfernung beider Treffen, weil sie in dem rechtwinklichen Dreieck FEG dem spitzen Winkel EFG und dem rechten Winkel EGF gegenüber liegt, (§. 57.) Diese Linie wird auch immer kleiner je größer der Schwenkungswinkel BFB′ wird; und wenn dieser bei einer Viertelschwenkung in den rechten Winkel übergeht, so verschwindet sie völlig. Fig. 77. +EF

§. 125. Diese Bewegung läßt sich indeß auch so machen, daß die beiden Treffen, wenn sie nach der Schwenkung gerichtet sind, von einander noch eben so weit entfernt sind, als sie bei der ersten Stellung waren. Ich will zuerst das geometrische Verfahren beschreiben, und nachher zeigen, wie man es bei der wirklichen Ausführung dieser Bewegung auf dem Felde anwenden kann,

um wenigstens der Genauigkeit so nahe zu kommen, daß kein erheblicher Fehler entsteht.

Weil die Entfernung immer kleiner wird, wenn der Punkt E um den das zweite Treffen schwenken soll, gerade hinter den Punkt F genommen wird; so sieht man leicht, daß ein anderer Punkt im zweiten Treffen zu dem Punkt genommen werden muß, um den das zweite Treffen schwenken soll. Wo liegt aber dieser Punkt und auf welcher Seite von E?

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir annehmen H sei dieser Punkt; die Schwenkung sei geschehen, und beide Treffen hätten nunmehr die Stellung A′ B′, C′ D′ angenommen, so daß diese Linien eben so weit von einander entfernt wären, als bei der ersten Stellung AB, CD.

Fig. 178.

Wenn man daher von F auf CD die Linie FE und auf C′ D′ die Linie FK perpendikulär zieht, so muß FE = FK sein, weil dies die Entfernungen der Treffen sind und beide gleich groß sein sollen.

Man ziehe nunmehr nach dem Punkt H, um den das zweite Treffen geschwenkt hat, die Linie FH; so bekommen wir dadurch zwei rechtwinklichte Dreiecke FEH, FHK.

In diesen ist FE = FK; die Linie FH gehört zu dem einen sowohl als zu dem andern; daher sind die Linien die einen von den spitzen Winkeln einschließen, einander gleich; folglich auch die Dreiecke

ecke selbst (§. 61.) und der Winkel KFH = HFE.

§. 126. Dadurch erhielten wir nun ein Mittel den Punkt H zu bestimmen, wenn wir nur den Winkel KFE selbst näher kennten: denn wir dürften nur diesen Winkel in zwei gleiche Theile theilen, so würde der Punkt H derjenige sein, wo die Theilungslinie das zweite Treffen oder die Linie CD durchschneidet.

Die Größe des Winkels KFE finden wir aber sehr leicht. Denn weil EF auf AB perpendikulär ist (§. 92.) so ist der Winkel EFB ein rechter Winkel. Es ist aber

der Winkel EFB = EFB′ + B′FB = R.

Ferner ist auch KF auf A′B′ oder auf die nach der Schwenkung angenommene Stellung des ersten Treffens perpendikulär. Demnach

KFB′ = KFE + EFB′ = R.

Es ist also EFB′ + B′FB = KFE + EFB′ §. 14. n. 1.

Nimmt man nun auf beiden Seiten den Winkel EFB′ weg, so ist

der Winkel B′FB = KFE.

Das will sagen, der Winkel KFE ist dem Schwenkungswinkel gleich: daher ist der Winkel KFH = HFE der Hälfte des Schwenkungswinkels gleich.

Nunmehr zeigt sich das Verfahren, welches wir beobachten müssen, den Punkt H im zweiten Treffen zu finden, von selbst.

Man theile nemlich den Schwenkungswinkel BFB′ durch die Linie FL in zwei gleiche Theile, und setze darauf die Linie FH perpendikulär; so ist der Punkt H, wo diese das zweite Treffen CD durchschneidet, der Punkt, um den das zweite Treffen schwenken muß, damit die Entfernungen bei der Treffen nach der Schwenkung so groß sind als bei der ersten Stellung.

Denn weil HFL ein rechter Winkel ist, so ist auch

$$HFB' + B'FL = R.$$

Es ist aber auch KFB′ ein rechter Winkel, folglich auch

$$KFH + HFB' = R.$$

Demnach

$$HFB' + B'FL = KFH + HFB'$$

Nimmt man HFB′ auf beiden Seiten weg, so bleibt

$$B'FL = KFH$$

oder $\frac{1}{2} B'FB = KFH.$

wie es erfordert wird.

§. 127. So verfährt man geometrisch. Wie aber nun auf dem Felde? Beim Manövriren läßt sich dies nicht so abzirkeln. Allerdings nicht; allein ein gutes Augenmaaß muß ersetzen, was der Zirkel und das Lineal auf dem Papier thut; und ein gutes Augenmaaß muß sich der Officier verschaffen, wenn er nicht beständig im Finstern tappen will. Hat er dies, so zeigt ihm alsdenn die Geometrie, wie er es anwenden muß.

Bei

Bei der Ausübung muß man ferner bedenken, daß es auf ein Paar Schritte mehr oder weniger, nicht ankommt; denn es ist nichts daran gelegen, ob die Treffen, die 200 oder 300 Schritte von einander abstehen sollen, 210 oder 285 oder 312 von einander entfernt sind? Eine am unrechten Ort angebrachte Pünktlichkeit verräth den Pedanten und den kleinerlichen Mann. Bei Bewegungen einer ganzen Armee muß man nur den Hauptzweck, den Zweck des Ganzen, vor Augen haben.

§. 128. Wenn wir dies voraussetzen, so wird es einem General nicht schwer fallen in der größten Geschwindigkeit den Punkt H, um den sich das zweite Treffen schwenken soll, so genau zu bestimmen, als es der Zweck der ganzen Bewegung erfordert. Wenn er nemlich den Schwenkungswinkel BFB' festgesetzt hat, stellt er sich bei dem Punkt F, um den das erste Treffen schwenken soll; theilt mit dem bloßen Auge diesen Schwenkungswinkel in zwei gleiche Theile; setzt auf diese Linie FL, die er in Gedanken behält, durch das bloße Auge die Linie FH perpendikulär, bestimmt dadurch den Schwenkungspunkt H im zweiten Treffen, und läßt durch seinen Adjutanten befehlen, daß dieser unverrückt stehen bleiben soll; so ist die Sache abgethan. Dies alles kann mit einem geübten Augenmaaße in einem Augenblick ohne den mindesten Zeitverlust geschehen; und es wird kein Fehler begangen werden, der von Erheblichkeit sein könnte.

§. 129. Indeß wird dadurch die Ueberflügelung nicht gehoben. Diese ist aber so wenig ein Fehler, daß sie in manchen Fällen vielmehr ein Vortheil zu sein scheint. Denn gesetzt der Feind erschiene auf einer von unsern Flanken, und wäre im Begrif die Armee zu tourniren; so darf man nur mit einem Theile beider Treffen eine Schwenkung rückwärts machen, wenn man nicht schlechterdings an das Terrain gebunden ist. Alsdenn überflügelt das zweite Treffen das erste, und diese Ueberflügelung kann sehr gut benutzt werden, den Feind, wenn er nicht mit der nöthigen Vorsicht vorrückt, selbst in die Flanke zu nehmen. Ginge aber bei dieser Bewegung zugleich die Entfernung der Treffen verlohren; so würden sie bald in Verwirrung gerathen und das eine auf das andre geworfen werden.

Dreizehnte Stunde.

Gleichgestreckte Vierecke oder Parallelogramme.

§. 130.

Nach dem Dreieck ist das Viereck die einfachste Figur und unter diesen das gleichgestreckte Viereck oder Parallelogram der Schlüssel zur Vergleichung der Räume, die in dem Umfang einer jeden geradlinigten Figur eingeschlossen sind. Man versteht aber unter Parallelogram ein Viereck oder, vielmehr einen viereckigten Raum, in dem zwei gegenüber liegende Seiten einander gleich und parallel sind.

Wenn in dieser Figur ein jeder Winkel ein rechter ist, so nennt man sie ein Rectangel oder Rechteck. Sind alle Winkel rechte und überdies alle Seiten einander gleich, so heißt sie ein Quadrat.

§. 131. In jedem Parallelogram ABCD sind beide an einer Seite z. B. AB liegende Winkel BAD, ABC zusammen genommen zweien rechten Winkeln gleich. Denn weil DC, AB parallel und einander gleich sind (§. 130.), so sind auch AD, BC einander gleich und parallel (§. 112.) Demnach

$$BAD + ABC = 2\ R.$$

(§. 105.)

2) Auch sind die einander gegenüber liegenden Winkel BAD, BCD einander gleich; weil BAD + ABC = 2 R
und ABC + BCD = 2 R.
Demnach ABC + BCD = BAD + ABC
folglich wenn man auf beiden Seiten den Winkel ABC wegnimmt
BAD = BCD.

3) Theilt die gerade Linie BD, welche von der Spitze des einen Winkels nach der Spitze des gegenüberliegenden Winkels gezogen und die Diagonale genennt wird, das Parallelogram in zwei vollkommen gleiche Dreiecke, ABD, BCD.

Denn die Seite BD haben beide Dreiecke gemein; und AB = CD, AD = BC. (§. 130. 131.) folglich sind die Dreiecke einander selbst gleich. (§. 54.)

§. 132. Bei einem Quadrat theilt die Diagonale auch den rechten Winkel in zwei gleiche Theile.

Denn ABD, BCD sind gleichschenklige Dreiecke, weil AB = AD = BC = CD.
Fig. 80. Demnach ist der Winkel ABD dem Winkel ADB, und der Winkel BDC dem Winkel DBC gleich. (§. 51.)

Beide Dreiecke sind aber einander auch gleich (§. 131. n. 3.)

Demnach ist der Winkel ABD = DBC
und ABD + DBC = R.

Das

Das will sagen, ABD + ABD = R. (§. 14. n. 2.) oder

Der Winkel ABD = DBC = BDC = BDA zweimal genommen ist einem rechten Winkel gleich. Es ist also der Winkel ABD, oder DBC, oder BDC oder BDA die Hälfte eines rechten Winkels, und die Linie DB oder AC theilt den rechten Winkel in zwei gleiche Theile.

§. 133. **Wenn in einem Parallelogram ABCD ein Winkel DAB bekannt ist, so sind auch die übrigen bekannt.**

Denn der gegenüber liegende Winkel BCD ist dem Winkel DAB gleich (§. 131. n. 2.) und wenn man den Winkel DAB von zweien rechten abzieht, so bekommt man den Winkel ABC sowohl als den Winkel ADB (§. 131. n. 1.) Fig. 79.

§. 134. **Wenn ein Winkel und zwei Seiten die den Winkel einschließen, gegeben werden, so ist es leicht, ein Parallelogram zu zeichnen oder zu beschreiben.** Fig. 79.

Man nehme die Seite AB so groß als eine von den gegebenen, und beschreibe bei A einen Winkel BAD, der dem gegebenen gleich ist (§. 81.); auf dem andern Schenkel dieses Winkels nehme man AD so groß als die andere gegebene Seite; ziehe durch D die Linie DC mit AB und durch B die Linie BC mit AD parallel, so ist das verlangte Parallelogram gezeichnet.

Denn weil DC mit AB und BC mit AD parallel ist, so ist AB = DC und BC = AD (§. 113.) Daher AB C D ein Parallelogram (§. 130.) in dem der Winkel ABD dem verlangten gleich ist.

§. 137. **Ein Quadrat zu beschreiben, wenn die Seite desselben gegeben wird.**

Dies geschieht eben so wie vorhin. Man macht AB der gegebenen Seite gleich; beschreibt Fig. 80. bei A einen rechten Winkel, nimmt AD = AB, und zieht DC mit AB und BC mit AD parallel.

Denn auf diese Art ist AB = AD = DC = DB (§. 113.) und weil DAB ein rechter Winkel ist, so ist es auch +~~ADB~~ und ABC, BCD. (§. 131. u. 132.) +ADC

§. 136. Gemeiniglich zeichnet man ein Parallelogram so: Man macht AB einer von den gegebenen Seiten, bei A den Winkel BAD dem gegebenen Winkel, und AD der andern gegebenen Seite gleich. Wenn dies geschehen, nimmt man mit dem Zirkel (ein bekanntes Instrument beim Zeichnen) die Linie AB, setzt den einen Schenkel desselben in D und beschreibt aus diesem Punkt einen Bogen; man greift mit dem Zirkel die Linie AD ab, setzt einen Schenkel desselben in B und beschreibt wieder einen Bogen, der den zuerst aus D beschriebenen in C durchschneidet; so ist ABCD ein **Parallelogram**, in dem der Winkel Fig. 79.

kel dem gegebenen und die Seiten auch den gegebenen gleich sind.

Denn wenn man die Diagonal BD ziehet, so sind die Dreiecke ABD, BDC einander gleich; weil BD gemeinschaftlich und durch die Zeichnung BC=AD; DC=AB gemacht worden. Daher sind auch die Winkel BDC, ABD, desgleichen die Winkel BDA, DBC einander gleich (§. 54.) folglich DC, AB parallel (§. 106.) und ABCD ein Parellelogram.

§. 137. Das Rectangel oder rechtwinklichte Parallelogram, ist nebst dem Quadrat eine Figur, die in der Stellungskunst oder Taktik oft mit großem Nutzen gegen den Feind gebraucht werden kann. Der militärische noch jezt gebräuchliche Ausdruck, Quarree, begreift beide in sich, und das Quarree formiren ist eine bekannte Uebung der Infanterie. Man hat in der Kriegsgeschichte eine Menge Beispiele, daß sich die Infanterie in dieser Stellung gegen eine überlegene Anzahl Kavallerie zurückgezogen und alle Angriffe derselben abgeschlagen hat. Nach der Schlacht bei Fraustadt zog sich der General Schulenburg mit der sächsischen Infanterie in einem Quarree zurück und entkam glücklich, ob ihn gleich der schwedische General Meinschild mit seiner ganzen Kavallerie verfolgte. Im Jahre 1703 zog sich der Fürst von Anhalt-Dessau von dem Schellenberge mit seiner Infanterie in

einem Quarree zurück und widerstand allen Angriffen der französischen Reuterei. Das preußische Regiment Manteufel und Grenadierbataillon Diringshofen zogen sich 1760 von Neustadt bis Neiße in einem länglichen Quarree zurück, und alle Angriffe des Generals Laudon mit seiner braven und überlegenen Kavallerie, liefen fruchtlos ab. Ich übergehe mehrere dergleichen Fälle. Wiewohl man nun gegen die Schwäche einiger Theile des Quarrees einige Einwendungen machen könnte, so bleibt es doch für die Infanterie immer eine Stellung, in der sie nicht leicht überwältigt werden kann, wenn es ihr nur nicht an Bravheit mangelt.

§. 138. Die schwachen Seiten eines Quarrees sind die Ecken. Denn vor diesen befindet sich ein beträchtlicher Raum, der nicht allzuwohl durch das Feuer der Infanterie bestrichen werden kann. Daher richtet auch die Kavallerie gemeiniglich ihren Angriff auf diese Ecken. Wenn indeß die Infanterie Artillerie mit sich führt, so kann diesem Fehler leicht abgeholfen werden, wenn man sie in die Spitzen der Winkel oder in die Ecken stellt, wo sie durch ihr Feuer dem Ungestüm der Kavallerie schon Einhalt thun wird. Hat aber die Infanterie kein Geschütz bei sich, so kann man einige Pelotons um das Quarre

und

und vor die Ecken stellen, die durch ihr Feuer den ersten Anfall der Kavallerie abhalten.

Der zweite Fehler besteht darin, daß sich mit dem Quarree nicht allzuwohl Schwenkungen machen lassen, und man daher nur nach der Richtung einer der verlängerten Seiten marschiren kann. Man setzt aber gemeiniglich voraus, daß sich ein Quarree auf einer Ebene oder auf einem Terrain zurückzieht, das man praktisch als eine Ebene annehmen kann. Daher hat dies auch eben so viel nicht zu bedeuten. Befinden sich aber auf der Gegend Höhen, Gebüsche, Waldungen und andere Gegenstände, welche den Bewegungen der Kavallerie hinderlich, der Infanterie aber günstig sind; so wird diese immer Zeit bekommen, die Richtung ihres Marsches allmählig zu verändern, ohne dabei in Verwirrung zu gerathen; besonders wenn die sogenannten **Flanken des Quarrees** mit Abtheilungen zu **Sechsen** marschiren, die sich leicht etwas rechts oder links ziehen können, ohne den Seiten, die mit **gerader Front** marschiren, in ihren Bewegungen hinderlich zu fallen.

§. 139. Es ist nicht schwer, aus einer Linie Infanterie ein **militärisches Quarree** zu machen, oder wie man es nennt, zu formiren; und dies kann auf verschiedene Arten geschehen, nachdem die Linie entweder sich schon in einer gewissen Stellung befindet, oder noch auf dem Marsch

ist. Weil dieß indeß nicht geschehen kann, ohne daß sich die verschiedenen Theile, aus denen das Quarree bestehen soll, bewegen, so ist nur darauf zu sehen, daß es mit Ordnung und in so kurzer Zeit geschieht, als es ohne Nachtheil der Ordnung geschehen kann. Ein Grundsatz, der bei allen militärischen Evolutionen und Bewegungen beobachtet werden sollte.

Wenn aus einem Bataillon, das in der Linie AB aufmarschirt und wie gewöhnlich in 8 Züge oder Pelotons eingetheilt ist, ein Quarree gemacht werden soll; so behalten der vierte und fünfte Zug Front, die ersten drei machen Linksumkehrt, und schwenken hierauf rechts, so daß sie in der Stellung CD perpendikulär auf AB zu stehen kommen. Die drei letzten Züge machen ebenfalls Linksumkehrt, schwenken hierauf links in der Stellung EF, die auf AB perpendikulär ist. Endlich schwenken noch der erste Zug rechts und der achte links, und schließen das Quarree. Die Schwenkung kann übrigens mit allen Zügen zugleich oder so geschehen, daß ein jeder für sich schwenkt, und nach dem Posten marschirt, den er in dem Quarree einnehmen soll. Fig. 81.

§. 140. Man nennt bei einem Quarree, diejenige Seite, welche Front nach der Gegend macht, wohin marschirt werden soll, die Tete; die ihr gegen über liegende Seite, die Rückseite (Queue); die Seite, welche in Rücksicht auf die Richtung des Marsches sich rechter

Hand

Hand befindet, die rechte, und diejenige, welche sich linker Hand befindet, die linke Flanke. Fig. 82.

Wenn daher FE die Richtung ist nach der fortmarschirt werden soll; so ist AB die Tete, CD die Rückseite (Queue), AD die rechte und BC die linke Flanke.

§. 141. Sind vier Bataillone in der Linie AB aufmarschirt, die ein Quarree machen sollen; so kann es auf eben diese Art geschehen, wenn man ein jedes in zwei Theile theilt und daher acht halbe Bataillone bekommt. Soll aber jede Seite aus einem ganzen Bataillon bestehen, so kann man folgendergestalt verfahren. Fig. 83.

Das zweite Bataillon bleibt stehen, und macht die Tete. Das erste macht Linksumkehrt, schwenkt rechts, und macht die rechte Flanke EF. Zu gleicher Zeit macht das vierte Bataillon Linksumkehrt, schwenkt links, um die linke Flanke zu machen. Wenn von beiden Bataillonen diese Bewegung gemacht worden, so macht das dritte Bataillon auch Linksumkehrt, schwenkt mit Abtheilungen (Sektionen) zu 6 Rotten links, marschirt ab und zieht sich nach und nach hinter das zweite Bataillon. Das vierte folgt mit gerader Front, und schließt sich in CD an das zweite. Wenn das vierte Bataillon diese Stellung genommen und Halt! Front! gemacht, das dritte aber eingeschwenkt hat, so marschirt dieses gerade

aus

aus und macht die Rückseite (Queue) DF des Quarrees.

§. 142. Sollen sechs in der Linie AB aufmarschirte Bataillone ein Quarree machen; so setzt man Eins in jeder Flanke, und nimmt zwei zur Tete und Rückseite.

Das dritte und vierte Bataillon bleiben stehen, behalten Front und machen die Tete. Das erste, zweite, fünfte und sechste Bataillon machen Linksumkehrt; das erste schwenkt hierauf rechts in der Stellung CD, das sechste links in der Stellung EF. Das zweite Bataillon schwenkt mit Abtheilungen zu 6 Rotten rechts, das fünfte mit Abtheilungen zu 6 Rotten links, und nunmehr ziehen sie sich hinter das dritte und vierte, indeß zugleich das erste und sechste mit gerader Front folgen. Wenn das erste Bataillon in die Stellung GH, das zweite hinter dem dritten, das fünfte hinter dem vierten und das sechste in die Stellung IK gekommen ist; so machen das erste und sechste Halt, Front, das zweite und fünfte schwenken ein, marschiren mit gerader Front zwischen der ersten und sechsten fort und formiren die Rückseite HK (Queue) des Quarrees. Fig. 14.

In beiden Fällen bleibt das erste Glied der Bataillone, welche die Rückseite formiren, einwärts, und das dritte steht auswärts. Dies ist aber kein Fehler, denn der Soldat im dritten Gliede muß eben so gut fechten können, als der im ersten.

§. 143.

§. 143. **Ist ein Bataillon auf dem Marsch, und es soll ein Quarree machen, so kann dies auf verschiedene Arten geschehen, nachdem man die Front nimmt, und verlangt, daß die Züge in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgen sollen oder nicht.**

Ich will annehmen, das Bataillon AB sei rechts abmarschirt. Es soll ein Quarree machen, und in demselben seinen Marsch fortsetzen; so marschirt es erstlich mit Divisionen auf, das will sagen, der zweite, vierte, sechste und achte Zug ziehen sich links heraus, und setzen sich mit dem ersten, dritten, fünften und siebenten in einer Linie. Fig. 85.a.

Soll nun der erste und zweite Zug oder die erste Division die Tete machen, so bleibt sie stehen; die zweite Division schwenkt links und schließt sich an den linken Flügel der ersten und macht die linke Flanke; die dritte Division marschirt so lange geradeaus bis sie auf den Platz kommt, wo die zweite gestanden, alsdenn schwenkt sie rechts und macht die rechte Flanke; die vierte Division marschirt gerade aus und schließt das Quarree, oder nimmt die Rückseite (Queue) ein. Fig. 85.b. Fig. 85.c.

Auf diese Art ist zwar das Quarree in kurzer Zeit formirt; allein nun folgen die Züge nicht in der natürlichen Ordnung auf einander, und das dritte Glied der vierten Division steht außerhalb. Sollten sie in eben der Ordnung, wie sie im Bataillon stehen auseinander folgen; so müßten die

ersten

ersten vier Züge wie vorhin aufmarschiren und ihre Stellung nehmen; der fünfte und sechste Zug aber vorher einen Kontremarsch machen, und sich so nebeneinander setzen, daß der fünfte linker Hand dem sechsten zu stehen käme, alsdenn wieder Front machen, gerade ausmarschiren und sich im Rücken (Queue) des Quarres setzen. Der siebente und achte Zug marschiren ebenfalls wie vorhin auf; schwenken aber auf der Stelle rechts, marschiren mit Abtheilungen zu sechs Rotten links ab, und setzen sich in die rechte Flanke. Nunmehr folgen die Züge so auf einander wie sie in dem Bataillon stehen, und das erste Glied befindet sich außerhalb.

Fig. 85.d

Fig. 85.e.

§. 144. Ich übergehe mehrere Arten, das Quarree zu formiren. Jeder, der nur Kenntnisse in der Geometrie besitzt, wird leicht mehrere erfinden und für jeden besondern Fall diejenige Art bestimmen können, welche die schicklichste ist. Man verfährt eben so, wenn größere Quarrees gemacht werden; sie mögen nun alle gleichseitig oder längliche Quarrees sein sollen. Wenn sich mehrere Bataillone in einer Kolonne befinden, und es soll auf dem Marsch ein Quarree gemacht werden; so ist diejenige Art allemal die beste, wodurch wir unsere Absicht in der kürzesten Zeit erreichen; und in dieser Rücksicht ist es kein Fehler, wenn auch die Bataillone in dem Quarree nicht

nicht so auf einander folgen, wie sie in der Kolonne stehen, und bei einer oder der andern Seite das dritte Glied außerhalb bleibt.

Vierzehnte Stunde.

Vergleichung ebener Figuren.

§. 145.

Parallelogramme, ABCD, ABEF, die einerlei Grundlinie AB haben, und zwischen einerlei Parallelen HF, KL liegen, sind einander gleich. Fig. 16.

Denn nach der Natur dieser Figuren, ist (§. 130.)

$$CD = AB \text{ und } FE = AB.$$

demnach $CD = FE$. (§. 14. n. 1.)

Setzt man nun zu beiden die Linie CF hinzu, so ist auch

$$CD + CF = FE + CF$$

das ist $DF = CE$.

Weil ferner die Seiten AD, BC parallel sind (§. 130.) und von der Linie KL durchschnitten werden, so sind die Winkel ADF, BCE einander gleich (§. 105.) Daher haben die Dreiecke ADF, BCE folgende Eigenschaften:

AD = BC. (§. 130.)

DF = CE, wie schon erwiesen worden

und ADF = BCE.

Es sind also die Dreiecke einander selbst gleich,

ADF = BCE.

Beide haben das Dreieck GCF gemeinschaftlich, oder es ist

ADF = ADCG + GCF

BCE = BGFE + GCF

Nimmt man von beiden GCF weg, so bleiben die Vierecke ADCG, BGFE übrig die ebenfalls einander gleich sind (§. 14.)

Weil demnach ADCG = BGFE und man setzt zu jedem das Dreieck ABG hinzu, so ist auch

ADCG + AGB = BGFE + AGB.

(§. 14.)

Die ersten beiden Figuren machen zusammen das Parallelogram ABCD, die beiden Figuren rechter Hand das Parallelogram ABEF. Daher ist

ABCD = ABEF.

§. 146. Parallelogramme, ABCD, EFGH zwischen einerlei Parallelen MN, PQ, die gleiche Grundlinien AB, EF haben, sind einander gleich.

Man ziehe AH, BG. Weil EF = GH (§. 130.) und EF = AB nach der Voraussetzung, so ist auch AB = HG (§. 14. n. 1.) Nun sind AB, HG parallel daher sind auch AH, BG

Fig. 37.

parall

parallel und einander gleich. (§. 112.) Demnach ist auch ABGH ein Parallelogram (§. 130.) Die Parallelogramme ABCD, ABGH haben also einerlei Grundlinie AB, und liegen zwischen einerlei Parallelen. Es ist also

ABCD = ABGH.

Die Parallelogramme ABGH, EFGH haben aber auch einerlei Grundlinie GH und liegen zwischen einerlei Parallelen. Es ist daher auch

ABGH = EFGH (§. 146.)

Demnach ist auch ABCD = EFGH (§. 14. II. 1.)

§. 147. Ein Dreieck ABC ist die Hälfte eines Parallelograms, dessen Grundlinie der Grundlinie des Dreiecks gleich ist, und mit demselben zwischen einerlei Parallelen liegt. Fig. 88.

Man ziehe durch die Spitze des der Grundlinie AB gegen über liegenden Winkels C die Linie DC mit AB, und BD mit AC parallel, so ist

AC = BD, DC = AB. (§. 113.)

und ABCD ein Parallelogram (§. 130.) das durch die Diagonale BC in zwei gleiche Dreiecke getheilt wird. (§. 131. n. 3.)

§. 148. Dreiecke ABC, EFG zwischen einerlei Parallelen MN, PQ, deren Grundlinien AB, EF einerlei oder gleich sind, sind einander gleich. Fig. 89.

Denn wenn man AD mit BC und FH mit EG parallel zieht, so entstehen zwei Parallelogramme ABCD, EFHG die einander gleich sind. (§. 146.) Es sind daher auch die Hälften

Man theile die Grundlinie des Dreiecks ABC in D in zwei gleiche Theile; ziehe EF, beschreibe bei E den Winkel FEH der dem Winkel Q gleich ist (§. 81.) richte in E auf EF eine Perpendikulärlinie EK auf und mache EK = CL der Höhe des Dreiecks ABC.

Durch K ziehe man KG mit EF parallel so daß sie den Schenkel EH des bei E beschriebenen Winkels in H durchschneide, nehme EF = AD der Hälfte der Grundlinie des Dreiecks ABC gleich und ziehe FG mit EH parallel, so ist das Parallelogram dem Dreieck ABC gleich.

Denn das Dreieck ADC ist die Hälfte des Parallelograms EFGH, (§. 150.) Das Dreieck DBC ist aber dem Dreieck ADC gleich (§. 150.) beide zusammen sind also dem Parallelogram EFGH gleich, das will sagen, das Dreieck ABC ist dem Parallelogram EFGH gleich, in dem der Winkel FEH dem gegebenen Winkel Q gleich ist.

§. 153. **Wenn man durch einen Punkt K in der Diagonal eines Parallelograms ABCD mit den Seiten desselben die geraden Linien EF, GH parallel zieht; so sind die auf beiden Seiten der Diagonal AC liegende Parallelogramme BHKE, KFDG einander gleich.**

Fig. 92.

Denn die Diagonal AC theilt das Parallelogram in zwei vollkommen gleiche Dreiecke ABC, ACD. (§. 131. n. 3.) Die um die Diagonal lie-

liegende Vierecke AEKG, HCFK sind aber auch Parallelogramme. (§. 113 und 130.) und werden von eben dieser Diagonal in zwei gleiche Dreiecke getheilt, so daß

$$\triangle AKG = \triangle AEK$$
$$\triangle KFC = \triangle KCH$$

demnach $\triangle AKG + \triangle KFC = \triangle AEK + \triangle KCH$ (§. 14.)

Es ist aber das Dreieck

$$ACD = \triangle AKG + \triangle KFC + KFDG$$
$$ABC = \triangle AEK + \triangle KCH + BHKE.$$

Demnach

$$\triangle AKG + \triangle KFC + KFDG = \triangle AEK + \triangle KCH + BHKE.$$

Nimmt man die einander gleichen Dreiecke auf beiden Seiten weg

so bleibt $KFDG = BHKE$ (§. 14.)

§. 154. Diese Eigenschaft der Parallelogramme giebt ein Mittel an die Hand, die im vorigen §. aufgelößte Aufgabe allgemeiner zu machen. Der Geometer liebt keine Einschränkung, nicht einzelne besondere Fälle, sondern sucht beständig das Allgemeine; das will sagen, etwas das alle besondere Fälle in sich schließt. Nach dem §. 152. können wir ein Parallelogram machen, das unter einem gegebenen Winkel einem Dreiecke gleich ist. Allein dies konnte nicht anders geschehen, als wenn wir die Grundlinie des Parallelograms

der Hälfte der Grundlinie des Dreiecks gleich machten. Wie aber?

Fig. 93. Wenn das Dreieck MNO nebst dem Winkel Q gegeben werden, und man soll auf einer Linie AE, die ebenfalls gegeben oder bestimmt wird, ein Parallelogram beschreiben, das unter eben dem Winkel Q dem Dreieck MNO gleich ist:

So verlängere man die Linie EA bis D und beschreibe auf AD unter dem Winkel Q ein Parallelogram ABCD das dem Dreieck MNO gleich ist (§. 152.)

Man ziehe durch E die Linie KH mit CD und durch C die Linie CK mit AE parallel (§. 109.) so daß sie sich in K durchschneiden.

Man ziehe ferner KA und verlängere diese Linie, so wird sie die verlängerte Linie CD in F durchschneiden; weil sonst beide parallel sein und daher die Summe der beiden Winkel DCK, CKA zweien rechten Winkeln gleich sein müßte, (§. 105.) Es sind aber die Winkel DCK, EKC zusammengenommen zweien rechten Winkeln gleich, weil EK, CD parallel sind, daher ist die Summe der Winkel DCK, AKC offenbar kleiner als zwei rechte.

Zieht man nun durch F die Linie FH parallel mit CK oder AE und diese durchschneidet die verlängerten Linien AB, EK in G und H so ist das Parallelogram AEHG dem Dreieck MNO gleich.

Denn

Denn weil CK, FH und FC, HK nach der Zeichnung parallel sind, so ist FHKC ein Parallelogram (§. 130 und 113.) dessen Diagonale FK. Demnach ist das Parallelogram

ABCD = dem Parall. AEGH.

Es ist aber das Parallelogram ABCD dem Dreieck MNO gleich gemacht worden; demnach ist auch das Parallelogram AEHG dem Dreieck MNO gleich. (§. 14. n. 1.)

§. 155. **Man kann daher auf eine gegebene oder bestimmte gerade Linie FG allezeit ein Parallelogram beschreiben, das unter einem gegebenen Winkel Q einer geradlinigten Figur ABCDE gleich ist, die Anzahl der Seiten mag so groß sein als sie wolle.** Fig. 94.

Man theile die Figur ABCDE in Dreiecke AED, ABD, BCD, beschreibe auf der gegebenen Linie FG unter dem Winkel Q ein Parallelogram FGIH das dem Dreieck AED gleich ist. (§. 154.)

Auf der Linie HI = FG (§. 130.) beschreibe man ein Parallelogram HILK, das dem Dreieck ABD gleich ist (§. 154.) Auf der Linie KL = HI = FG, ein Parallelogram KLNM das dem Dreieck BCD gleich ist und so weiter, wenn die Figur aus mehrern Dreiecken besteht, (§. 154.) so ist das aus diesen zusammen gesetzte Parallelogram FGNM der Figur ABCDE gleich.

Denn weil man lauter Parallelogramme beschrieben hat, so sind HI, KL, MN mit FG parallel (§. 107.) GN, FM sind aber die verlängerten Linien GI, FH und daher auch parallel. Demnach ist FGNM ein Parallelogram.

Nun ist nach der Zeichnung

Das Parallelogram FGIH = △ ADE
HILK = △ ABD.
KLMN = △ BCD

Folglich sind alle Parallelogramme zusammengenommen allen Dreiecken zusammengenommen gleich; das will sagen, das Parallelogram FGMN ist der geradlinigten Figur ABCDE gleich. In dem Parallelogram FGNM ist aber auch der Winkel MFG dem gegebenen Winkel Q gleich gemacht worden; folglich ist es so beschrieben, wie es verlangt worden.

Funf-

Funfzehnte Stunde.

Der Pythagoriſche Lehrſatz.

§. 156.

Die Geſchichte der Wiſſenſchaften und Künſte hat ihre Fabeln ſo gut wie die Geſchichte der Nationen, wenn man ihr in den dunkeln Tiefen des Alterthums nachſpürt. Dahin gehört ohne Zweifel das Opfer von hundert Ochſen, das Pythagoras, ein alter berühmter Weltweiſe, der ohngefähr 590 Jahr vor unſerer Zeitrechnung lebte, den Muſen gebracht haben ſoll, als er die Entdeckung machte, daß in einem rechtwinklichen Dreieck das Quadrat der größten Seite oder Hypothenuſe, dem Quadraten der beiden übrigen Seiten zuſammen genommen gleich iſt. Dem ſei wie ihm wolle, ſo hat doch dieſer Satz den Namen ſeines Erfinders behalten und verewigt ihn mehr als alle philoſophiſche Grillen, die er erträumte.

§. 157. Folgende Bemerkung wird uns zum Beweiſe dieſes Satzes den Weg bahnen.

Wenn in zweien Vierecken ABCD, EFGH drei auf einander folgende Seiten und die zwiſchen ihnen liegenden Winkel gleich ſind, ſo ſind auch die Vierecke einander ſelbſt, die vierte Fig. 95.

vierte Seite der vierten und die beiden übrigen Winkel einander gleich.

Wenn nemlich AD = EH; AB = EF; BC = FG und der Winkel DAB = HEF; ABC = EFG; so ist auch DC = GH und der Winkel ADC = EHG; BCD = FGH.

Man lege das Viereck EFGH dergestalt auf das Viereck ABCD, daß die Linie EF auf AB, der Punkt E auf A und der Punkt F auf B falle; so fällt auch die Linie EH auf AD, und FG auf BC, weil die Winkel BAD, HEF und die Winkel BAD, EFG gleich sind. (§. 123.) Auch fallen die Punkte H und G auf D und C, weil die †EH = AD, BC = FG.

† Linien

Diese Vierecke fallen also genau auf einander daher auch alles übrige in beiden gleich ist. (§. 14. n. 9.)

§. 158. **In einem rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Seite BC, die dem rechten Winkel gegen über liegt, oder der Hypothenuse, den Quadraten der beiden Seiten AB, HC, die den rechten Winkel einschließen, zusammengenommen gleich.**

Fig. 96.

Man beschreibe über AB, AC, BC die Quadrate ABGF, ACDE, BHLC und ziehe die Diagonalen AD, AB, so ist jeder der Winkel DAC, BAG die Hälfte eines rechten Winkels (§. 138.) Demnach sind die drei Winkel DAC + CAB + BAG zweien rechten Winkeln

gleich

gleich und AD, AG liegen in gerader Linie oder machen nur eine gerade Linie. (§. 25.)

Man ziehe EF, so ist das Dreieck EFA dem Dreieck ABC gleich, weil AB = AF; AC = AE und EAF = BAC. (§. 48.)

Es ist also auch BC = EF

Der Winkel EFA = ABC

FEA = ACB

Ueber HL beschreibe man ein Dreieck LHK welches dem Dreieck ABC gleich ist, so daß der Winkel

HLK = ABC.

KHL = BGA

und ziehe AK.

Weil ABG = CLH

und ABC = HLK.

so ist ABG + ABC = CLH + HLK.

oder der Winkel CBG = CLK.

und weil ACD = BCL

ABC = ABC

so ist auch ABC + ACD = ABC + BCL.

demnach BCD = ACL.

In den beiden Vierecken ACLK, GBCD sind also

CA = CD; CB = CL; BG = LK

BCD = ACL; CBG = CLK.

Folglich sind die Vierecke einander selbst gleich. (§. 157.)

Weil ferner EFA = ABC
AFG = CBH = R.
so ist auch EFA + AFG = ABC
+ CBH.
oder EFG = ABH.
Endlich ist AEF = LHK = ACB.
DEA = BHL = R.
demnach AEF + DEA = BHL + LHK
das ist FED = BHK.

Da nun auch AB = FG und BH = EF = BC, KH = DE = AC so sind auch die Vierecke ABHK, GFED einander gleich.

Es ist also die Figur GBCDEF der Figur ABHKLC vollkommen gleich. Nimmt man aber von der ersten die Dreiecke ABC, AEF weg, so bleiben die Quadrate ABGF, ACDE übrig; nimmt man von der zweiten die Dreiecke ABC, HKL weg, die den vorigen gleich sind, so bleibt das Quadrat der größten Seite BHLC übrig. Die ersten beiden zusammen genommen sind also dem letztern gleich, weil man von gleichen Größen gleiche Größen weggenommen. (§. 14. n. 3.)

§. 159. Dieser Beweis scheint etwas weitläuftig zu sein; er hat aber den Vorzug, daß die Wahrheit des Satzes anschaulich gemacht werden kann. Denn wenn man alles, so wie die Figur zeigt, auf dem Papiere gezeichnet hat, so kann man die Figur ABH, KLC, von dem Papier ab und nach der Linie AK in zwei Theile

schnei-

schneiden. Legt man nun das Viereck ACLK dergestalt auf das Viereck DCBG, daß die Linie CL auf CB, CA auf CD, die Punkte C auf C und L auf B fallen, so decken sie einander.

Legt man ferner das Viereck ABHK dergestalt auf das Viereck GFED, daß der Punkt B auf F, der Punkt A auf G, der Punkt H auf E fällt, so decken sie ebenfalls einander, daher alles übrige einleuchtend ist.

§. 160. Es ist nun aber noch die Frage, ob das rechtwinkliche Dreieck diese Eigenschaft nur allein hat? Allerdings scheint dies so, allein mit diesem Scheinen ist kein Geometer zufrieden, und muß sich auch nie dadurch verführen lassen; sonst läuft er Gefahr in Irrthümer zu gerathen. Denn nicht alle Sätze sind auch umgekehrt wahr.

Um dies zu entscheiden, wollen wir annehmen: von dem Dreieck ABC sei bekannt, daß das Quadrat der Seite BC den Quadraten der beiden übrigen Seiten AB, AC gleich oder daß Fig. 97.

$$\square BC = \square AB + \square AC$$

sei. Ist es nun bei A rechtwinklich, so muß folgen, daß, wenn man über AC ein rechtwinkliches Dreieck CAD beschreibt, dergestalt daß $AD = AB$ und DAC ein rechter Winkel ist, der Winkel CAB auch ein rechter Winkel, oder welches einerlei ist, DA und AB nur eine und dieselbe gerade Linie machen.

Man

Man beschreibe also dies rechtwinkliche Dreieck wirklich und ziehe CD. So ist nach dem §. 158.

$$\square DC = \square AD + \square AC$$

oder weil nach der Zeichnung $AD = AB$

$$\square DC = \square AB + \square AC.$$ (§. 14. n. 1.)

Demnach ist nach der Voraussetzung auch

$$\square DC = \square BC.$$

Folglich da alle Seiten eines Quadrats einander gleich sind, die Linie

$$DC = BC.$$

In den Dreiecken ABC, ACD sind also alle Seiten gleich

weil AC in beiden gemeinschaftlich

$$AD = AB$$ gemacht

und nach dem was so eben bewiesen worden

$$DC = BC$$

ist. Es sind also auch die gleichen Seiten gegen über liegende Winkel gleich. Folglich da DAC ein rechter Winkel so ist auch BAC ein rechter Winkel. Demnach liegen AD, AB in einer geraden Linie, und der Satz:

Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite so groß ist als die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seiten zusammengenommen, so ist es rechtwinklich:

hat seine völlige Richtigkeit.

§. 161.

§. 161. Wenn man von den Zahlen 3, 4, 5 die Quadrate macht, so sind solche 9, 16, 25 und es ist $25 = 9 + 16$. Eben so ist auch $36 + 64 = 100$, welche die Quadrat der Zahlen 6, 8, 10 sind. Wenn daher in einem Dreieck eine Seite 3 Fuß, die andre 4 und die dritte 5 Fuß ist, so ist es rechtwinklich; ist die eine Seite 6, die zweite 8 und die dritte 10 Fuß, so ist es ebenfalls rechtwinklich.

Man bedient sich eines solchen Dreiecks in manchen Fällen, auf dem Felde einen rechten Winkel abzustecken, oder auf eine gerade Linie eine Perpendikulärlinie aufzurichten. Zu dem Ende nimt man auf einer nicht zu dicken Schnur EF, von A bis B, 3, 6 oder 9 Fuß, von B bis C 4, 8 oder 12 Fuß, und befestigt in A und C. eine andere, die 5, 10 oder 15 Fuß enthält. Soll man nun auf eine auf dem Felde abgesteckte gerade Linie MN in N eine Perpendikularlinie aufrichten oder einen rechten Winkel machen; so legt man die Schnur EF auf MN dergestalt, daß der Punkt B auf N fällt, befestigt sie in E und N mit Pfählen, zieht sie an, damit BC, AC gerade werden, und befestigt sie in F mit einem dritten Pfahle, so ist FB oder FN auf MN in N perpendikulair. Fig. 98. Fig. 99.

Man muß aber nicht glauben, daß diese Perpendikularlinie geometrisch genau sei. Indeß ist sie in den mehresten Fällen doch immer so genau als man sie nöthig hat; z. B. beim Abstecken der

Batterien, Redouten und anderer Verschanzungen. Hat man ein gutes Augenmaaß, so kommt man mit demselben beinahe eben so weit, wie wir schon oben bemerkt haben. Verlangt man aber eine größere und vollkommne Genauigkeit, so muß man sich des Meßinstruments bedienen, das wir bald werden kennen lernen.

Sechzehnte Stunde.

Der Zirkel.

§. 162.

Wir kommen zu einer Figur, die von jeher nicht allein die Aufmerksamkeit der Geometer, sondern auch einer Menge anderer Menschen auf sich gezogen hat, zu dem Zirkel oder Kreis. Der Nutzen dieser so einfachen, so leicht zu beschreibenden Figur breitet sich sowohl über alle Theile der Mathematik, als auch über verschiedene Bedürfnisse des menschlichen Lebens aus, und ohne sie würden sich die mehresten Künste niemals auf eine gewisse Stufe der Vollkommenheit geschwungen haben. Die mehresten Werkzeuge der Geometrie hängen von den Eigenschaften derselben ab, und

ohne

ohne eine genaue und sorgfältige Untersuchung, Zergliederung und Anwendung derselben würde die Geographie, die Kunst, die zu dieser Wissenschaft nöthigen Charten zu verfertigen, die Astronomie ꝛc. noch in ihrer Kindheit und die Schiffahrt, mit der Schiffahrt der Wilden auf einerlei Fuß seyn. Man muß es daher einigen Leuten vergeben, wenn sie ihre Hochachtung gegen den den Zirkel zu weit treiben und ihn für den Stein der Weisen in der Mathematik halten. Dahin gehört besonders die Gesellschaft der Magier, Geisterseher, Teufelsbanner und der Zirkel-Quadrirer; einer Art geometrischer Adepten und mathematischer Goldmacher, die, wie gewöhnlich, ohne alle gründliche Kenntniß der Geometrie, und daher nicht im Stande sind, ihre Thorheiten einzusehen.

§. 163. Die Eigenschaft des Zirkels, daß alle Linien, die man von dem Mittelpunkt bis an einen Punkt in dem Umkreise desselben zieht, und Halbmesser (Radii) genannt werden, einander gleich sind (§. 43.) macht es leicht in allen Fällen, sowohl auf dem Papier als auf einer ebenen Fläche auf dem Felde, um einen gegebenen Punkt einen Zirkel oder Kreis zu schreiben.

Wenn dies auf dem Felde geschehen soll, so bestimmt man zuerst, wie groß der Halbmesser des Zirkels seyn soll; sodann nimmt man zwei zugespitzte Pfähle A, B, steckt den ersten in dem Punkt fest, um den der Zirkel beschrieben werden soll, bindet eine Schnur an demselben, gibt ihr die Fig. 100.

gehörige Länge, und befestigt an dem andern Ende wieder einen zugespitzten starken Pfahl B, ziehe die Schnur stark an, und reißt alsdann mit der Spitze B die Erde etwas auf, indem man um A herumgeht. Während dieser Arbeit muß man nur die Schnur beständig gleich stark anziehn, damit der Punkt B überall gleich weit von dem Punkt A entfernt bleibe.

§. 164. Aus der Art, wie ein Zirkel entsteht, folgt unmittelbar, daß Zirkel, die mit gleichen Halbmessern AB, CD beschrieben werden, einander gleich sind.

Denn wenn man sie beide so auf ein-
Fig. ander legt, daß der Mittelpunkt C auf den
101. Mittelpunkt A fällt, so ist ein jeder Punkt B in dem Umkreise des ersten Zirkels von dem Mittelpunkt A so weit entfernt, als jeder Punkt in dem Umkreise des zweiten von dem Mittelpunkt C: beide Zirkel fallen daher genau auf einander oder decken sich, folglich sind sowohl die Umkreise dieser Zirkel als auch die Flächen, welche in diesen Umkreisen eingeschlossen sind, einander gleich.

§. 165. In der Tactik würde die Stellung in einem Zirkel den Vortheil haben, daß sich ein Korps Infanterie am besten gegen Kavallerie vertheidigen könnte, weil wirklich der Zirkel keine so schwachen Stellen hat, als bei dem Quarree die Ecken sind. Allein auf der andern Seite hat diese Figur den Nachtheil, daß

daß sich die ganze Masse nicht einen Schritt von der Stelle bewegen kann, ohne in Verwirrung zu gerathen; und diesen Fehler hat eine jede krummlinigte Figur. Eben so scheinen auch die in Gestalt eines Zirkels angelegten Schanzen oder Reduten sehr stark zu sein, weil sie ihr Feuer überall verbreiten, und an keinem Orte ein unbestrichner Raum zu finden ist. Untersucht man sie aber genau, so findet man bald, daß dieser Vortheil nur scheinbar ist; weil sich das Feuer der Infanterie zu sehr zerstreuet, und daher nicht wirksam genug sein kann. Indeß haben die einwärts nach dem Lager zu gebognen und als ein halber Zirkel oder als ein Theil eines halben Zirkels angelegten Schanzen ihren Nutzen, besonders auf der Ebene, wenn man keinen großen Raum einnehmen und doch vor der Fronte überall ein kreuzendes Feuer erhalten will. Man stelle sich eine Armee vor, von der einige Brigaden Infanterie in einer geraden Linie gelagert sind. Wird nun auf jedem Flügel der Brigade die, zu denselben gehörige schwere Artillerie in einem einwärts gehenden halben oder in einem Stück eines halben Zirkels gestellt, so werden alle Schüsse durch den Mittelpunkt gehen. Es ist daher vor der ganzen Fronte kein Punkt, der nicht bestrichen werden könnte. Ein so zusammenhangendes schräges, kreuzendes und daher wirksames Feuer läßt sich durch keine andere Stellung des Geschützes er-

Fig. 102.

halten; besonders wird von dem Kartätschenfeuer die Fronte ganz mit Kugeln bestrt, wenn man sich so ausdrücken darf. Es ist übrigens nicht nöthig, daß die Schanze wirklich in Gestalt eines einwärtsgebognen Zirkels angelegt werde; es ist genug wenn das Geschütz in dem Umkreise dieses Fig. 103. Zirkels steht, die Schanze mag so viel Seiten haben als sie wolle, oder es mag eine aufgeworfen sein oder nicht.

§. 166. Ehe wir bei der Untersuchung der Eigenschaften des Zirkels weiter gehen, müssen wir uns mit einigen Benennungen bekannt machen, die man bei dem Zirkel angenommen hat, um weitläuftige Umschreibungen zu vermeiden.

1) Die krumme Linie, welche den Raum einschließt oder begränzt, den ein Zirkel in der Ebene einnimmt, und deren Punkte von dem Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, heist der Umkreis oder die Peripherie des Zirkels.

2) Eine jede gerade Linie EF, die von Fig. einem Punkt E in dem Umkreise des Zirkels 101. bis zu einem andern F in eben dem Umkreise gezogen werden kann, die Sehne, Chorde, und wenn sie durch den Mittelpunkt C geht, der Durchmesser, Diameter.

3) Der Theil des Umkreises zwischen zweien Punkten E, F, ein Bogen oder ein zu der Sehne EF gehörender Bogen.

4)

4) Die Fläche zwischen diesen Bogen und der Sehne EF ein Abschnitt, Segment

5) Der Raum ABC, der von zwei aus dem Mittelpunkt A gezogenen geraden Linien AB, AC, die man Halbmesser nennt, und dem Bogen BC eingeschlossen wird, ein Ausschnitt, Sector; der Winkel BAC am Mittelpunkt, der Winkel, und der Theil BC des Umkreises, der Bogen dieses Ausschnitts. Fig. 104

6) Der Winkel EGF, dessen Spitze G in dem Umkreise liegt, und dessen Schenkel GE, GF, durch zwei andere Punkte E, F des Umkreises gehn, der Winkel in dem Abschnitt oder Segment EGF.

§. 167. Man darf nur einen Blick auf die Figur werfen, so überzeugt man sich leicht, daß

In eben dem Zirkel oder in gleichen Zirkeln, das will sagen, in Zirkeln, die mit gleichen Halbmessern AB, DE beschrieben werden, die Ausschnitte BAC, EDF, deren Winkel am Mittelpunkte gleich sind, einander vollkommen gleich sind, so wie auch die Bogen BC, EF.

Denn weil die Winkel am Mittelpunkte gleich groß angenommen werden, so bedecken sie einander genau, wenn man den Ausschnitt EDF des zweiten Zirkels auf den Ausschnitt BAC des ersten Zirkels so legt, daß der Punkt D auf A

und die Linie DE auf AB fällt, (§. 23 und §. 14 N. 9) daher fällt denn auch der Bogen EF auf den Bogen BC, und beide sind einander gleich.

§. 168. Auch sind in eben dem Zirkel oder in gleichen Zirkeln die Abschnitte HGI, KML und die dazu gehörenden Bogen GHI, KLM einander gleich, wenn die Sehnen GI, KM einander gleich sind.

Um dies zu beweisen, ziehe man nach den Fig. 105. Mittelpunkten der beiden Zirkel die Halbmesser GA, IA und KD, MD, so sind diese einander gleich, weil die Zirkel einander gleich sind. (§. 164) Es sind aber auch nach der Voraussetzung die Sehnen GI, KM einander gleich, daher sind in den Dreiecken IGA, KMD die Seiten einander gleich, folglich ist auch der Winkel IAG dem Winkel KDM gleich. (§. 54.)

Setzt man diese Dreiecke zu den Abschnitten HIG, KLM, so bekömmt man die Ausschnitte GAI, KDM, deren Winkel an den Mittelpunkten A und D gleich, sie also einander selbst und die Bogen IG, KM einander gleich sind. (§. 167.) Nimmt man von dem Ausschnitt GAIH das Dreieck IAG, und von dem Ausschnitt KDML das Dreieck KDM weg, so nimmmt man von gleichen Größen gleiche Größen weg, folglich bleiben gleiche Größen übrig (§. 14. N. 3), welches die Abschnitte HIG, KLM sind.

§. 169.

§. 169. Sind aber umgekehrt die Ausschnitte ABC, EDF, oder die Abschnitte GHI, KLM, oder die Bogen BC, EF, eben des Zirkels oder zweier gleicher Zirkel einander gleich; so sind auch die Winkel am Mittelpunkte, welche dazu gehören, und die Sehnen unter diesen Bogen einander gleich.

Denn wäre dies letzte nicht, so könnte auch das erste, nach dem was angenommen worden, nicht statt finden.

§. 170. Der Durchmesser (Diameter) AB theilt sowohl die Zirkelfläche AEBD als auch den Umkreis in zwei gleiche Theile.

Man ziehe nach Gefallen eine Linie DE durch den Mittelpunkt C, so entstehen dadurch vier Ausschnitte BCD, DCA, ACE, ECB. Fig. 106.

Weil nun die Winkel ACE, BCD am Mittelpunkt einander gleich sind (§. 27.) so sind auch diese Ausschnitte einander, und der Bogen AE dem Bogen BD gleich. (§. 167.)

Eben so sind auch die Winkel BCE, ACD einander gleich, (§. 27.) folglich auch die Ausschnitte BCE, ACD und die Bogen AD, BE.

Demnach ist der Ausschnitt BCD = ACE

ACD = BCE

folglich BCD + ACD = ACE + BCE

oder der Theil BDA = AEB.

Das will sagen, die Linie AB, oder der Durchmesser theilt die Zirkelfläche in zwei gleiche Theile.

Da auch der Bogen BD = AE
AD = BE
so ist BD + AD = AE + BE
oder ADB = AEB.

Daher wird auch der Umkreis durch die Linie AB in zwei gleiche Theile getheilt.

§. 171. Wenn man einen Winkel BAC in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. B. durch fortgesetztes Halbiren, in die Winkel DAE, EAF, FAG ꝛc. theilt, und alsdenn aus der Spitze desselben A mit einem nach Gefallen angenommenen Halbmesser AD zwischen den Schenkeln den Bogen DK beschreibt; so wird dieser durch die Theilungslinien des Winkels in eben so viel gleiche Theile getheilt.

Fig. 107.

Denn man bekömmt alsdenn gerade so viel Ausschnitte DAE, EAF ꝛc. als Theile des Winkels sind. Weil nun die Winkel am Mittelpunkt einander gleich sind, so sind auch die Bogen einander gleich. DE = EF = FG = ꝛc.

§. 172. Theilt man hingegen einen aus der Spitze A eines Winkels BAC beschriebenen Zirkelbogen in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, DE = EF = FE ꝛc. und zieht sodann von den Theilungspunkten nach dem Mittelpunkt A gerade Linien EA, FA ꝛc. so wird auch dadurch der Winkel BAC in eben so viel gleiche Theile getheilt; weil man dadurch gerade eben so viel Ausschnitte bekommt, als Theile in dem ganzen Bo-

Bogen sind, deren Winkel am Mittelpunkte einander gleich sind.

Siebenzehnte Stunde.

Eigenschaften der Sehnen, (Chorden) Zirkeln.

§. 173.

Wenn man eine Sehne AB eines Zirkels in zwei gleiche Theile theilt, und durch den Theilungspunkt C eine gerade Linie CD auf diese Sehne perpendikulär zieht, so geht sie durch den Mittelpunkt des Zirkels.

Gesetzt der Mittelpunkt läge nicht in der Linie CD, sondern außerhalb in E, so ziehe man die Linien EA, EC, EB. Nun haben wir EA = EB, weil alle Halbmesser einander gleich sind, AC = CB, weil die Linie AB in zwei gleiche Theile getheilt worden. In den beiden Dreiecken EAC, EBC ist also die Seite EC gemeinschaftlich, die übrigen Seiten sind einander gleich, folglich sind auch die Winkel, die gleichen Seiten gegenüber liegen, einander gleich; (§. 54.) demnach der Winkel ECA = ECB, folglich sind beide rechte Win-

Fig. 108.

Winkel (§. 24 und 25) und die Linie EC ist auf AB in C perpendikulär.

Es wäre also der kleinere Winkel ECA dem größern DCA gleich, welches unmöglich ist. Folglich liegt der Mittelpunkt nicht außerhalb der Perpendikularlinie DC, sondern in derselben, und daher geht sie durch den Mittelpunkt.

§. 174. Eine gerade Linie CD, die von dem Mittelpunkt C auf eine Sehne AB perpendikulär gezogen wird, theilet nicht allein die Sehne, sondern auch die auf beiden Seiten derselben liegenden Bögen in zwei gleiche Theile.

Man ziehe die Halbmesser CA, CB, so entsteht ein gleichschenckliches Dreieck ACB, in dem die Winkel an der Grundlinie AB einander gleich sind. (§. 51.) Weil nun CD auf AB perpendikulär ist, daher der Winkel CDB = CDA (§. 24.) so sind die beyden Dreiecke CAD, CBD einander gleich (§. 59) und demnach der

Fig 209

Winkel ACD = BCD

BD = AD

folglich theilt die Linie CD die Sehne AB in zwei gleiche Theile. Verlängert man sie aber auf beiden Seiten, bis sie den Zirkel in E und F durchschneidet, so ist der Winkel ACE oder ACD = ECB oder DCB. Folglich sind die Ausschnitte und auch die Bögen AE, BE einander gleich. Und weil der Winkel ACE + ACF = 2 R

BCE + BCF = 2 R (§. 25.)

folg-

folglich ACE + ACF = BCE + BCF,
und demnach, wenn man Gleiches von Gleichem wegnimmt ACF = BCF
so sind auch die Ausschnitte ACF, BCF einander gleich.

Und hieraus folgt denn, daß die Linie CD, wenn sie auf beiden Seiten verlängert wird, auch die auf beiden Seiten der Sehne AB liegenden Bogen in zwei gleiche Theile theilt.

§. 175. Ist aber die Sehne AB in D in zwei gleiche Theile getheilt, und man zieht von dem Mittelpunkt C nach dem Theilungspunkt D eine gerade Linie, so ist dieselbe auf die Sehne perpendikulär.

Denn weil AD = DB, AC = CB und CD gemeinschaftlich, so sind in den Dreiecken ACD, BCD die Seiten gleich, demnach der Winkel ADC = BDC (§. 54.) und CD auf AB perpendikulär. (§. 24.)

§. 176. Eben diese Linie CD theilt auch die Bögen AEB, AFB in zwei gleiche Theile, wenn sie auf beiden Seiten verlängert wird: weil, wie bewiesen worden, die Winkel BCE, ACE einander gleich sind, und daher auch die Winkel ACF, BCF (§. 25 u. 174.)

§. 177. Soll man daher einen gegebenen Zirkelbogen AEB oder AFB in zwei gleiche Theile theilen;

So theilt man nur die Sehne AB in zwei gleiche Theile, (§. 174) zieht durch den Theilungs-

lungspunkt D von dem Mittelpunkt C eine gerade Linie, und verlängert sie bis sie den Bogen AB in E oder F durchschneidet, so sind die die Theilungspunkte.

§. 178. **Durch drei Punkte A, B, D die in einer geraden Linie liegen, kann kein Zirkel gezogen werden.**

Fig. 110. Wäre es möglich, so müßten die Linien CA, CB, CD, die von dem Mittelpunkt nach diesen Punkten gezogen werden können, einander gleich seyn, weil sie Halbmesser eines Zirkels sind. (§. 43.) Nach dieser Bedingungen wären also ABC, ACD gleichschenkliche Dreiecke, folglich der Winkel BAC = CBA; und auch der Winkel BAC oder DAC = CDA. (§. 41.) folglich der Winkel CBA = CDA. (§. 14, N. 3.) Dies ist aber unmöglich, weil der äußere Winkel CBA in dem Dreieck CDB allezeit größer ist als der innere Winkel CDA. (§. 55.)

§. 179. Wenn also durch drei Punkte ein Zirkel beschrieben werden soll, so müssen sie nicht in einer geraden Linie liegen.

§. 180. **Durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, den Umkreis eines Zirkels oder überhaupt einen Zirkel zu beschreiben.**

Fig. 111. Man ziehe die geraden Linien AB, BD, AD, theile davon, z. B. AB, BD in E und F in zwei gleiche Theile, (§. 74) richte in den Theilungs-

Ringspunkten auf AB, BD perpendikulärlinien auf, (§. 75.) so liegt der Mittelpunkt des Zirkels in dem Punkt C, wo sich diese Linien durchschneiden. Man setze nunmehr einen Schenkel des Instruments, das man den Zirkel nennt, in C, eröfne es bis A oder B und beschreibe mit dem Halbmesser AC oder BC einen Zirkel, so wird derselbe durch die Punkte A, B, D gehen.

§. 181. Sehnen AB, DE, die in einem Zirkel oder in gleichen Zirkeln von dem Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, sind einander gleich. Fig. 112.

Die Entfernung einer Sehne vom Mittelpunkt ist die gerade Linie, die von demselben auf die Sehne perpendikulär gezogen werden kann. (§. 92.)

Diese Entfernungen CF, CG sollen also einander gleich seyn. Da sie auf AB, DE perpendikulär sind, so theilen sie die Sehnen in zwei gleiche Theile, so daß AF = BF, DG = GE (§. 174.) In den rechtwinklichen Dreiecken ACF, DCG sind also die Seiten AC, CD einander gleich. (§. 43.) Ferner ist nach der Voraussetzung FC = CG, folglich auch AF = DG. (§. 61.) das ist die Hälfte der Sehne AB der Hälfte der Sehne DE gleich, daher müssen auch die ganzen Sehnen gleich oder AB = DE seyn. (§. 14, n. 7.)

§. 182. Eben dies ist auch umgekehrt wahr. Wenn nemlich die Sehnen AB, DE einander

ander gleich sind, so sind sie von dem Mittelpunkt gleich weit entfernt.

Man theile sie in G und F in zwei gleiche Theile und ziehe CG, CF, so ist

$$DG = AF$$

und CG, CF sind auf DE, AB perpendikulär (§. 174.) Demnach ist in den rechtwinklichen Dreiecken AFC, DCG, CD = CA, DG = AF, folglich auch CG = CF (§. 61.)

§. 183. Von Sehnen AB, DE, die ungleich weit vom Mittelpunkte C entfernt sind, ist diejenige die größte, welche am nächsten am Mittelpunkt liegt.

Fig. 113.

Man ziehe die Halbmesser AC, CD, welche einander gleich sind (§. 43.) und CF, CG auf die Sehne perpendikulär, welche sie in zwei gleiche Theile theilen. (§. 174.)

Es sei nunmehr CF kleiner als CG, so ist auch das Quadrat von CF kleiner als das Quadrat von CG.

Nun ist aber

$$\square AC = \square AF + \square FC$$
$$\square DC = \square DG + \square CG \quad (§.158.)$$

Demnach nach §. 14, n. 1.

$$\square AF + \square FC = \square DG + \square CG.$$

Nimmt man nun auf der einen Seite das Quadrat von FC und auf der andern das Quadrat von CG weg, so nimmt man von gleichen Größen ungleiche weg, und diejenige Größe ist größer, von der man die kleinere weggenommen

men hat. (§. 14, n. 7. und 8.) Demnach ist das Quadrat von AF größer als das Quadrat von DG, folglich auch AF größer als DG. Das ist, die Hälfte der dem Mittelpunkt nähern Sehne AB, ist größer als die Hälfte der entferntern Sehne DE, folglich ist auch die ganze Sehne AB größer als die Sehne DE. (§. 14, n. 5.)

§. 184. Der Durchmesser ist daher die größte aller Sehnen, und jede andere Sehne kleiner: weil der Durchmesser den beiden Seiten CA, CB in dem Dreieck ACB gleich ist. (§. 62.)

Achtzehnte Stunde.

Berührungslinien oder Tangenten.

§. 185.

Eine gerade Linie EF, die auf einen Halbmesser oder Durchmesser in dem Punkt B perpendikulär ist, wo er den Zirkel durchschneidet, fällt ganz außer dem Zirkel. Fig. 114.

Denn wenn man von dem Mittelpunkt C nach einem Punkt D in dieser Linie EF, er sei welcher er wolle, eine gerade Linie CD zieht,

welche der Zirkel in L durchschneidet, so liegt diese in dem rechtwinklichen Dreiek CBD allemal dem rechten Winkel gegen über, und ist daher beständig größer als der Halbmesser CB oder CL, (§. 60.) folglich ist jeder Punkt in der Linie EF von dem Mittelpunkt weiter entfernt als der Umkreis, daher außerhalb dem Zirkel.

§. 186. **Zwischen dem Umkreis des Zirkels und der Linie EF, die auf den Halbmesser in B perpendikulär ist, kann durch B keine gerade Linie gedacht oder gezogen werden, die ganz außerhalb dem Zirkel fiele.**

Man nehme an, es sey möglich, daß durch B eine Linie BG außerhalb dem Zirkel zwischen dessen Umkreis und der Linie BE gehen könnte; so ziehe man auf diese Linie von dem Mittelpunkt C eine Fig. Linie CH perpendikulär, welche den Zirkel noth-114. wendig in K durchschneiden muß, weil der Punkt H außerhalb liegt.

Es fällt in die Augen, daß die Linie CH nicht durch den Punkt B gehen kann, denn sonst wäre CBG ein rechter Winkel, und daher CBG = CBE, das kleinere dem größern gleich, welches unmöglich ist.

Es ist also CBH ein rechtwinkliches Dreiek, indem die Seite CB dem rechten Winkel CHB gegen über liegt. Demnach ist CB größer als CH (§. 60.)

Allein CB ist der Halbmesser, und daher CB = CK. Folglich ist auch CK größer als CH.

(§.

(§. 14, n. 1.) Weil aber der Punkt H außerhalb dem Zirkel liegt, so ist CK kleiner als CH.

Könnte demnach zwischen dem Umkreis und der Linie CE noch eine gerade Linie gezogen werden, die ganz außerhalb dem Zirkel fiele, so würde das Kleinere dem Größern gleich seyn müssen; eine Absurdität, welche die Unmöglichkeit dieser Sache beweiset.

§. 187. Indeß machen doch die geraden Linien BE oder BF und der Umkreis des Zirkels bei B, wo die Linie EF auf dem Halbmesser perpendikulär ist, einen Winkel aber keinen geradelinigten.

Dieser Winkel aber ist kleiner als jeder Winkel, den zwei gerade Linien mit einander einschließen können, so klein man sich ihn auch denken kann.

Denn so klein man ihn auch nimmt, und alsdenn in B auf BE oder BF einen andern beschreibt, der demselben gleich ist; so wird doch der andere Schenkel desselben nicht außerhalb dem Zirkel fallen; sondern ihn noch in einem andern Punkte außer B durchschneiden. (§. 186.)

§. 188. Man nennt die gerade Linie, die wie EF nur durch einen Punkt B in dem Umkreise eines Zirkels geht, übrigens aber ganz außer dem Zirkel fällt, eine Berührungslinie oder Tangente des Zirkels.

§. 189. Dergleichen Linien lassen sich nicht allein denken (§. 185.) sondern es ist auch leicht,

Durch einen gegebnen Punkt B in dem Umkreise eines Zirkels eine Tangente oder Linie zu ziehen, welche den Zirkel berühret.

Fig. 114.

Denn dazu wird weiter nichts erfordert, als daß man den Halbmesser CB und auf demselben in dem Punkt B die Linie EB perpendikulär aufrichtet. (§. 185.)

§. 190. Soll man von einem Punkt A außerhalb einem gegebenen Zirkel eine gerade Linie ziehen, welche den Zirkel berührt:

So ziehe man von dem Mittelpunkt C nach dem gegebenen Punkt eine gerade Linie und darauf in dem Punkt B, wo sie den Umkreis durchschneidet, eine Linie BD perpendikulär: Beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Zirkelbogen, welcher die Linie BD in B durchschneidet.

Fig. 115.

Man ziehe ferner von dem Mittelpunkt C nach D eine gerade Linie, welche den Umkreis des gegebenen Zirkels in E durchschneidet, und endlich AE; so wird diese den Zirkel in E berühren.

Denn in den beiden Dreiecken CEA, CBD ist

$$CE = CB$$
$$CA = CD \text{ (§. 43.)}$$

und der Winkel ACD gemeinschaftlich. Folglich sind die gleichen Seiten gegen über liegende Winkel einander gleich. (§. 48.). Dis will sagen, der Winkel CEA ist dem Winkel CBD gleich; folg-

folglich weil CBD ein rechter Winkel ist, so ist es der Winkel CEA auch; die Linie AE ist auf CE perpendikulär (§. 24.) und berührt daher den Zirkel. (§. 187. 188.)

§. 191. **Wenn eine gerade Linie EF einen Zirkel in dem Punkt B berührt, und man zieht von dem Mittelpunkt C nach B den Halbmesser, so ist derselbe auf die Berührungslinie perpendikulär.**

Wäre dies nicht, so sei eine gerade Linie CE, welche den Umkreis in D durchschneidet, in E auf die Berührungslinie perpendikulär. Der Winkel CEB wäre demnach ein rechter Winkel. (§. 24.) Fig. 116.

Die Linie CB läge also in dem Dreieck CEB dem rechten Winkel gegen über, und wäre daher größer als CE. (§. 60.) CB ist aber der Linie CD gleich, (§. 43.) weil beide Halbmesser eines und eben desselben Zirkels sind. (§. 43.) Folglich wäre CB zugleich größer und kleiner als CE, welches unmöglich ist. Demnach kann keine andere Linie auf EF perpendikulär seyn als CB.

§. 192. **Zieht man auf eine Linie EF, welche den Zirkel in dem Punkt B berührt, eine gerade Linie AB perpendikulär; so geht sie durch den Mittelpunkt des Zirkels.**

Läge der Mittelpunkt des Zirkels nicht in der Linie BA, sondern anderswo in D, und man zöge von diesem angenommenen Mittelpunkt D nach dem Berührungspunkt B eine gerade Linie Fig. 117.

DB, so wäre auch diese in B auf EF perpendikulär. (§. 191.)

Es wäre demnach so wohl DBE als CBE ein rechter Winkel, (§. 24.) das ist, ein kleinerer Winkel dem größern gleich, welches nicht seyn kann.

Die Linie BA geht demnach durch den Mittelpunkt des Zirkels, wie gesagt worden.

Neunzehnte Stunde.

Winkel bei dem Zirkel.

§. 193. In eben dem Zirkel ist ein Winkel am Mittelpunkt, oder dessen Spitze der Mittelpunkt ist, noch einmal so groß als der Winkel am Umkreise, oder dessen Spitze in dem Umkreise liegt, der auf eben dem Bogen steht.

Es kommen hierbei drei Fälle vor. Der Mittelpunkt des Zirkels liegt entweder

1) in einem von den Schenkeln des Winkels am Umkreise.

2) oder zwischen den Schenkeln dieses Winkels,

3) oder außerhalb denselben.

Bei

Bei dem ersten fällt dies leicht in die Augen. Der Winkel BCD am Mittelpunkt ist der äußre Winkel des Dreiecks ABC, und daher den beiden Winkeln CAB, CBA, zusammengenommen, gleich. Weil aber CA = CB (§. 43.) folglich das Dreieck gleichschenklich ist, so sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. (§. 51.) CAB = CBA, folglich CBA + CBA = CAB + CBA = 2 CAB = 2 BAD (§. 20.) Demnach auch Fig. 118.

BCD = 2 BAD.

Im zweiten Falle ziehe man durch den Mittelpunkt C eine gerade Linie und verlängere sie, bis sie den Zirkel in E durchschneidet; so wird der Winkel am Mittelpunkt und am Umkreise in zwei Theile getheilt, so daß Fig. 119.

BCD = BCE + DCE

BAD = BAE + DAE.

Nun ist aber nach dem, was im ersten Fall erwiesen worden

BCE = 2 BAE

DCE = 2 DAE.

Demnach BCE + DCE = 2 BAE + 2 DAE,

oder BCD = 2 (BAE + DAE)

das ist BCD = 2 BAE (§. 14, n. 1 u. 2.)

Im dritten Fall ziehe man wieder durch den Mittelpunkt eine gerade Linie AE, so ist der Winkel Fig. 120.

BCD = BCE — DCE
BAD = BAE — DAE

Auch hier ist nach dem, was schon im ersten Fall bewiesen worden,

BCE = 2 BAE
DCE = 2 DAE,

folglich BCE — DCE = 2 BAE — 2 DAE,

oder BCD = 2 (BAE — DAE.)

Das will sagen

BCD = 2 BAD (§. 14. n. 1 u. 2.)

§. 194. **Alle Winkel BAD, BED, BFD ꝛc. am Umkreise eines Zirkels, die auf eben den Bogen BD stehn, sind einander gleich.**

Denn wenn man sich in Gedanken den Winkel BCD an dem Mittelpunkt vorstellt, so ist ein jeder dieser Winkel die Hälfte desselben. (§. 193.) nemlich

Fig. 121.

BAD = ½ BCD
BED = ½ BCD
BFD = ½ BCD.
ꝛc. ꝛc.

Folglich BAD = BED = BFD = ꝛc.

§. 195. **Der Winkel BAD in einem halben Zirkel, das will sagen, der Winkel am Umkreise eines halben Zirkels, dessen Schenkel durch die Punkte gehn, wo der Durchmesser den Umkreis des Zirkels durchschneidet, ist ein rechter Winkel.**

Fig. 122.

Man

Man verlängere BA bis F und ziehe AC, so entstehen zwei gleichschenkliche Dreiecke BAC, CAD, weil BC, AC, CD einander gleich sind. (§. 43.) Die Winkel an den Grundlinien BA, AD sind einander gleich.

$$CBA = CAB$$
$$\text{oder } DBA = CAB$$
$$CDA \text{ oder } BDA = CAD \quad (\S. 20.)$$

Der Winkel FAD ist der äußere Winkel des Dreiecks BAD, folglich ist

$$FAD = DBA + BDA \quad (\S. 100.)$$
$$\text{oder } FAD = CAB + CAD \quad (\S. 14. \text{ n. } 1)$$
$$\text{das ist } FAD = BAD.$$

Demnach BAD ein rechter Winkel (§. 24.)

§. 196. **Der Winkel BAD am Umkreise, der auf einen Bogen BD steht, der kleiner ist als ein halber Zirkel, ist ein spitzer Winkel.**

Man ziehe durch den Mittelpunkt des Zirkels die Linie DE und hernach BE, so ist der Winkel EBD ein rechter Winkel; (§. 195.) folglich BED ein spitzer Winkel (§. 56.) folglich auch der Winkel BAD, weil er den Winkel BEC oder BED gleich ist. (§. 194.) Fig. 123.

§. 197. **In einem Viereck ABCD, das in einem Zirkel beschrieben werden kann, sind die gegen überliegenden Winkel BAD, BCD zusammen genommen, zweien rechten Winkeln gleich.** Fig. 124.

Fig. 124. Man ziehe die Diagonalen AC, BD so ist der Winkel BCA = BDA

DCA = ABD

folglich BCA + DCA = BDA + ABD (§. 14. n. 1.)

oder BCD = BDA + ABD;

weil nun BAD = BAD

so ist auch BCD + BAD = BAD + BDA + ABD, das will sagen, die Summe der gegenüber liegenden Winkel, allen Winkeln im Dreieck ABD, folglich zweien rechten Winkeln gleich. (§. 99.)

§. 198. **Der Winkel BAD am Umkreise, der auf einem Bogen BCD steht, der größer ist als ein halber Zirkel, ist ein stumpfer Winkel.**

Man ziehe die Linien CB, CD, so entsteht ein Viereck im Zirkel, folglich ist

BAD + BCD = 2 R (§. 197.)

Fig. 125. Der Winkel BCD steht aber auf einem Bogen, der kleiner ist als ein halber Zirkel; folglich ist er kleiner als ein rechter Winkel (§. 196.) oder ein spitzer Winkel.

Nimmt man diesen auf beiden Seiten weg, so ist BAD = 2 R — BCD.

Wird aber von zweien rechten Winkeln ein spitzer Winkel weggenommen, so bleibt ein Winkel übrig, der größer ist als ein rechter Winkel; folglich ist BAD ein stumpfer Winkel.

§. 199. **Wenn eine gerade Linie BA einen Zirkel in A berührt, und man zieht die Seh-**

Sehne AE, so ist der Winkel BAE, den die Tangente BD mit dieser Sehne macht, dem Winkel EFA in dem Umkreise gleich, der auf den zwischen der Tangente und der Sehne liegenden Bogen steht. Fig. 126.

Man ziehe AG durch den Mittelpunkt C und EG, so ist der Winkel EGA = EFA (§. 194.) Es ist aber AEG ein rechtwinkliches Dreieck (§. 195.) folglich

EGA + GAE = R. (§. 98.)

Es ist aber auch GAE + EAB = R (§. 191.)

folglich GAE + EAB = EGA + GAE, nimmt man nun auf beiden Seiten den Winkel GAE weg, so ist der Winkel EAB = EGA = EFA. (§. 14.)

§. 200. Der Winkel EHA, dessen Spitze in dem Umkreise des Bogens EHA zwischen der Tangente und der Sehne liegt und auf dem Bogen EFA steht, welcher mit dem Bogen EA zusammengenommen, den ganzen Umkreis des Zirkels ausmacht, ist dem Winkel EAD gleich, welchen die Sehne EA mit der Tangente BA macht, wenn sie auf der andern Seite verlängert wird.

Denn weil BAE + EAD = 2 R (§. 25.)

und EFA + EHA = 2 R (§. 197) Fig. 126.

so ist BAE + EAD = EFA + EHA,

allein EFA = BAE

folglich ist EFA + EAD = EFA + EHA

Denn

Demnach EAD = EHA (§. 14. n. 4.)

§. 201. **Ueber eine gegebene Linie AB einen Winkel zu beschreiben, der einem gegebenen Winkel A gleich ist, und dessen Schenkel durch die äußersten Punkte A und B dieser Linie gehn.**

Fig. 127. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so theile man AB in C in gleiche Theile und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA oder CB einen halben Zirkel; so wird jeder Winkel AGB in dem Umkreise desselben dem gegebenen rechten Winkel A gleich seyn. (§. 195.)

Ist der gegebene Winkel ein spitzer oder stumpfer, Fig. 129. so beschreibe man an der Linie AB einen Winkel BAD, der dem gegebenen gleich ist. (§. 81.)

Auf AD ziehe man AF perpendikulär (§. 75.) theile AB in zwei gleiche Theile in C (§. 74.) und setze darauf die Linie CE perpendikulär, welche AF in E durchschneidet.

Diesen Punkt E nehme man zum Mittelpunkt eines Zirkels an und beschreibe mit dem Halbmesser EA = EB (§. 174.) einen Zirkel; so ist jeder Winkel AGB in dem Umkreise des Abschnitts AFGB, der auf der Sehne AB steht, dem gegebenen Winkel A gleich.

Denn weil AF auf AD vermöge der Zeichnung perpendikulär ist und durch den Mittelpunkt des Zirkels geht, so berührt AD den Zirkel in A (§. 185.) Es ist also der Winkel AGB dem Win-

Winkel BAD (§. 199.); folglich auch dem Winkel A gleich. (§. 14. n. 1.)

§. 202. Es können daher über eine gerade Linie AB unendlich viel Winkel beschrieben werden, von den jeder dem gegebenen Winkel gleich ist. Der Punkt, in dem die Spitze des Winkels fällt, wird aber nicht bestimmt. Bisher waren alle Aufgaben bestimmt, das will sagen, man fand das, was man haben wollte, ganz genau. Dies Beispiel zeigt also, daß es in der Geometrie auch unbestimmte Aufgaben giebt, das will sagen, solche, welche die vorgelegte Bedingung auf verschiedene Art erfüllen; so wie hier der Bedingung, daß der Winkel AGB dem gegebenen Winkel gleich ist, durch einen jeden Winkel in dem Segment AGB ein Genüge geschehen kann. Indeß wird doch die Lage oder der Ort aller Punkte, wie G, in dem sich die Spitzen der Winkel befinden, genau bestimmt; denn diese liegen alle in dem Segment AGB. Daher kann man, wenn man will, das Segment oder den Zirkel den geometrischen Ort dieser Spitzen nennen (Locum geometricum;) so wie es die alten Geometer thaten.

Demnach EAD = EHA (§. 14. n. 4.)

§. 201. **Ueber eine gegebene Linie AB einen Winkel zu beschreiben, der einem gegebenen Winkel A gleich ist, und dessen Schenkel durch die äußersten Punkte A und B dieser Linie gehn.**

Fig. 127. Ist der gegebene Winkel ein rechter, so theile man AB in C in gleiche Theile und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA oder CB einen halben Zirkel; so wird jeder Winkel AGB in dem Umkreise desselben dem gegebenen rechten Winkel A gleich seyn. (§. 195.)

Fig. 129. Ist der gegebene Winkel ein spitzer oder stumpfer, so beschreibe man an der Linie AB einen Winkel BAD, der dem gegebenen gleich ist. (§. 81.)

Auf AD ziehe man AF perpendikulär (§. 75.) theile AB in zwei gleiche Theile in C (§. 74.) und setze darauf die Linie CE perpendikulär, welche AF in E durchschneidet.

Diesen Punkt E nehme man zum Mittelpunkt eines Zirkels an und beschreibe mit dem Halbmesser EA = EB (§. 174.) einen Zirkel; so ist jeder Winkel AGB in dem Umkreise des Abschnitts AFGB, der auf der Sehne AB steht, dem gegebenen Winkel A gleich.

Denn weil AF auf AD vermöge der Zeichnung perpendikulär ist und durch den Mittelpunkt des Zirkels geht, so berührt AD den Zirkel in A (§. 185.) Es ist also der Winkel AGB dem

Win-

Winkel BAD (§. 199.); folglich auch dem Winkel A gleich. (§. 14. n. 1.)

§. 202. Es können daher über eine gerade Linie AB unendlich viel Winkel beschrieben werden, von den jeder dem gegebenen Winkel gleich ist. Der Punkt, in dem die Spitze des Winkels fällt, wird aber nicht bestimmt. Bisher waren alle Aufgaben bestimmt, das will sagen, man fand das, was man haben wollte, ganz genau. Dies Beispiel zeigt also, daß es in der Geometrie auch unbestimmte Aufgaben giebt, das will sagen, solche, welche die vorgelegte Bedingung auf verschiedene Art erfüllen; so wie hier der Bedingung, daß der Winkel AGB dem gegebenen Winkel gleich ist, durch einen jeden Winkel in dem Segment AGB ein Genüge geschehen kann. Indeß wird doch die Lage oder der Ort aller Punkte, wie G, in dem sich die Spitzen der Winkel befinden, genau bestimmt; denn diese liegen alle in dem Segment AGB. Daher kann man, wenn man will, das Segment oder den Zirkel den geometrischen Ort dieser Spitzen nennen (Locum geometricum;) so wie es die alten Geometer thaten.

Zwanzigste Stunde.

Das Messen.

§. 203.

Wenn wir zwei Thürme, zwei Häuser, zwei Bäume vor uns sehen, so zeigt uns das Auge sehr bald, welcher von diesen Gegenständen größer ist als der andere; und eben so empfinden wir leicht, welcher von zweien Körpern, die wir aufheben, das größte Gewicht hat. Allein um wie viel ein Thurm größer ist als der andere, ein Haus größer als das andere, ein Baum höher wie der andere, ein Körper schwerer wie der andere? diese Fragen beantwortet so wenig das Auge als das Gefühl vollständig, und doch sind diese bei den meisten Angelegenheiten des menschlichen Lebens die wichtigsten. Zum Glück ist es nicht schwer, Mittel zu finden, die Größen mit einander zu vergleichen und sich von der Verschiedenheit, die bei ihrer Größe statt findet, auf eine richtige, deutliche und vollständige Art zu überzeugen; und dies Mittel ist so einfach, es fällt so leicht in die Augen, daß es dem Menschen angeboren zu seyn scheint, und der Geometer es nicht anders machen kann, als der Wilde in Nordamerika.

§. 204. Wir wollen uns z. B. einen Menschen vorstellen, der die Geometrie nicht einmal den Namen nach kennt und auf den Einfall käme,

käme, zu wissen, um wie viel der Baum B von seiner Hütte A weiter entfernt wäre als der Baum P; so würde er ohngefehr so schließen. Wenn du eine Schnur CD nimmst, die gerade so lang ist, als die Entfernung des Punkts A von P, und du legst diese Schnur auf die Linie AB dergestalt, daß der Punkt C auf A und D auf E fällt, hierauf den Punkt C wieder auf E, so daß der Punkt D auf F fällt, und dies so oft wiederholst, als es nöthig ist, so wird die Linie AB so viel mal größer seyn als AB oder CD, als oft die Schnur CD auf AB gelegt werden kann, bis sie die ganze Länge AB ausfüllt. Wäre nun die Linie CD, wenn sie einigemal zusammen gesetzt wird, genau in der Linie AB enthalten, so wüßte er auch ganz genau, wie vielmal die Linie AB größer wäre als AP; enthielte aber die Linie AB die Linie CD über AP nur einigemal, und es bliebe ein Stück BF übrig, das kleiner wäre als CD, so würde er doch sagen können, die Linie AB ist so viel mahl größer als CD, und noch um einen kleinen Theil, der kleiner ist als CD. Dadurch hätte er doch wenigstens einen ziemlich deutlichen Begrif von der eigentlichen Größe der Entfernung des Baums B von seinem Hause A in Rücksicht auf die Entfernung des Baums P von demselben, ob er gleich noch nicht vollständig wäre. Fig. 129.

§. 205. Auf eben diese Art verfährt der Geometer, und kann auch nicht anders verfahren. Warum sollte er auch seine Zeit verschwenden, um

auf

auf ein anderes Mittel zu denken, da dies so ungekünstelt und einfach ist, und aus diesem Grunde vor allen übrigen den Vorzug verdient. Nur wird er nicht blos mit einer beiläufigen Bestimmung zufrieden sein, sondern die größte Schärfe und Genauigkeit zu erreichen suchen. Wenn wir daher eine Fig. 130. Linie AB mit einer andern CD vergleichen wollen; so nehmen wir die Linie CD und legen sie auf AB, so daß sie nach und nach auf AE, EF, FG ꝛc. fällt. Wird nun durch die einigemal geschehene Wiederholung der Linie CD, die Linie AB ganz genau herausgebracht, so daß zuletzt der Punkt D auf B fällt, so erfahren wir, wie die Linie AB aus CD entsteht, und wir können ganz genau und bestimmt angeben, wie oft AB die Linie CD enthält.

Gesetzt aber, die Linie AB könnte durch die Zusammensetzung der Linie CD nicht vollkommen genau herausgebracht werden, sondern nachdem man bis F gekommen, bliebe ein Theil GB übrig, der kleiner wäre als CD; so theile man CD in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, CH, HI, ID, nehme einen solchen Theil und versuche, ob man durch die einigemal wiederholte Zusammensetzung eines solchen Theils die Linie AB herausbringen kann; geht dies an, so weiß man wieder genau, wie AB aus den Theilen der Linie CD entsteht. Z. B., wenn CD in 3 gleiche Theile getheilt würde, und AB enthielte 26 solche Theile, so wäre $AB = \frac{26}{3}\ CD = 8\ CD + \frac{2}{3}\ CD$.

Weil

Könnte aber AB auch nicht durch die Zusammensetzung eines solchen Theils genau herausgebracht werden, sondern es bliebe, nachdem man diesen Theil einige male zusammengesetzt, wieder ein Theil KB übrig, der kleiner wäre als CH oder $\frac{1}{5}$ C; so theile man CD in eine größere Anzahl gleicher Theile, z. B. in 6, 8, 10 ꝛc. und wenn diese auch noch nicht zureichen, in 1000, 10000, 100000, 1000000 ꝛc. gleiche Theile, die zuletzt so klein werden, daß man sie kaum mehr für eine Größe rechnen kann; so wird man entweder die Linie AB ganz genau, oder doch wenigstens so genau herausbringen, daß der Theil von AB, der übrig bleibt, allemal kleiner ist als der 10te, 100ste ꝛc. 1000000ste Theil der Linie CB. Man sieht leicht, daß man diese Theilung noch immer weiter fortsetzen kann, wenn sie zu unserer Absicht noch nicht hinreichend seyn sollte; daher kann man auch die Linie AB aus der Linie CD in jedem Falle so genau herausbringen, daß der Theil, der übrig bleibt, oder der Theil, um den AB größer ist als diejenige Linie, welche entsteht, wenn der Theil, in dem CD getheilt ist, eine gehörige Anzahl male wiederholt oder zusammengesetzt wird, kleiner ist als jede Größe, die man angeben oder sich noch als eine Größe denken kann, so daß dieser Fehler gar nicht verdient in Betrachtung gezogen zu werden.

§. 206. Die Verfahren kann bey allen Arten von Größen angebracht werden, es mögen Flächen

das ist Ausdehnungen, die in Linien eingeschlossen sind, Körper, Gewichte, Kräfte ꝛc. sein, kurz einen Namen haben, welchen sie wollen. Wir bekommen dadurch allezeit einen deutlichen und vollständigen Begrif von der Art, wie eine Größe aus der andern entsteht. Indeß fällt von selbst in die Augen, daß Größen, die man auf diese Art mit einander vergleichen will, von einerlei Art, gleichartig oder, wie man zu sagen pflegt, homogene Größen sein müssen. Denn wie könnte man sich ohne dieser Bedingung vorstellen, daß eine aus der andern entstehe? Daher vergleicht man Linien mit Linien, Flächen mit Flächen, körperliche Räume mit körperlichen Räumen, Gewichte mit Gewichten, Kräfte mit Kräften ꝛc. Und die Frage, wie viel Pfunde ein Zimmer hoch, oder wie viel Ellen ein Zentner Blei schwer ist, würde ins Ungewöhnliche und Lächerliche fallen.

§. 207. Indeß würde es in den mehresten Fällen sehr weitläuftig und mühsam sein, eine von den beiden Größen A und B, die man mit einander vergleichen will, allemal vorher in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, besonders wenn die Anzahl dieser Theile sehr groß wäre. Die Vergleichung aber kann eben so gut geschehen, wenn man eine dritte Größe zur Hülfe nimmt, die mit beiden von einerlei Art oder homogen ist. Wenn man z. B. die Linien AB, CD mit einander vergleichen wollte, und man fände, daß AB die Linie M, 7 mal und CD eben diese Linie

4 mal enthielte, so hätte man sowohl einen deutlichen und vollständigen Begrif von der Länge der Linie AB als CD, wenn man nur die Länge der Linie M bestimmt oder festgesetzt hat. Denn wenn $AB = 7M$, so ist $M = \frac{1}{7}A$, und da $CD = 4M$, so ist ohne Zweifel $CD = \frac{4}{7}AB$; und nun weiß man genau, wie CD aus AB entsteht, oder man weiß die Verhältniß der Linie CD zu der Linie AB und umgekehrt, die Verhältniß der Linie AB zu der Linie CD. Fig. 131.

Wäre A, B Gewichte, und M ein drittes Gewicht, und man fände, daß das Gewicht A 5 mal, und das Gewicht B 9 mal so gros wäre als das Gewicht M, so würde $AM = \frac{1}{5}A$ sein. Weil nun $B = 9M$, so wäre $B = \frac{9}{5}A$. Man weis also, wie B aus A entsteht, das will sagen, die Verhältniß des Gewichtes A zu dem Gewicht B.

§. 208. Die Verfahren, die Größen A und B mit einer dritten Größe M zu vergleichen, um dadurch zu erfahren, wie eine aus der andern entsteht, heißt Messen, und die Größe M, die dabei als die Einheit betrachtet wird, das Maas, zuweilen, und insonders wenn von Linien die Rede ist, der Maasstab. Auch wird die Bedeutung dieses Worts oft ausgedehnt, und man nennt im figürlichen Verstande, Maasstab, eine jede Größe, sie sei von welcher Art sie wolle, deren man

sich bedient, Größen von eben der Art zu messen.

§. 209. Mit einem solchen Maaße oder Maasstabe kommt man in allen Fällen weit geschwinder zu seinem Zweck, als wenn man sich des in dem 204ten und 205ten §. schon gewiesenen Verfahrens bedienen wollte. Weil aber in den mehresten Fällen die Größen A, B ꝛc. das Maas nicht immer genau enthalten, so theilt man ein für allemal das Maas in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile, jeden von diesen Theilen in eine willkührliche Anzahl kleinerer Theile, jeden von diesen aufs neue in eine gewisse Anzahl noch kleinerer Theile, und so kann man ohne Aufzuhören fortgehen, bis die Theile so klein werden, daß ihre Größe gar nicht mehr in Betrachtung kömmt. Dadurch erhält man den Vortheil, daß wenn sich die Größe A nicht genau aus dem Maaße M herausbringen läßt, sie doch durch den Zusatz einiger solcher Theile so genau herausgebracht werden kann, daß der Fehler, der dabei begangen wird, immer kleiner ist, als der kleinste Theil des Maaßes, den man noch angeben kann, und daher eben so wie §. 205 nicht verdient in Betrachtung gezogen zu werden.

§. 210. Wenn aber gleich die Eintheilung des Maaßes und die Unterabtheilung der Theile desselben willkührlich ist, so ist es doch billig, daß man dabei auf Bequemlichkeit im Rech-

Rechnen Rücksicht nimmt. Daher nimmt man dazu gern solche Zahlen, die sich durch verschiedene kleine Zahlen genau dividiren lassen, z. B. 12, 30, 60 ꝛc. Die beste Eintheilung ist diejenige, wo das Maaß in 10 gleiche Theile, jeder Theil in 10 kleinere, von diesen wieder ein jeder Theil in 10 kleinere und so weiter fort getheilt wird; alsdann bekommen wir keine andere als 10theilige Brüche, und mit diesen rechnet man eben so leicht und bequem als mit ganzen Zahlen.

§. 211. Auch das Maas selbst ist willkührlich, so wie die Eintheilung desselben, und eben die Willkührliche hat fast in jedem Lande, und selbst an verschiedenen Orten eben desselben Landes eine andere Größe und Eintheilung desselben verursache, ob es gleich zu wünschen wäre, daß man dabei etwas Allgemeines festsetzte. Alsdenn würde manche Zwistigkeit wegfallen, welche die Verschiedenheit der Maaße oft zu veranlassen pflegt; der Kaufmann würde einer Menge Rechnungen überhoben sein, die er zur Vergleichung der verschiedenen Längen, Maaße und Gewichte anstellen muß, und überhaupt die menschliche Gesellschaft bei den mehresten Verrichtungen die größten Vortheile erhalten. Was ist es nicht an sich schon für eine Unbequemlichkeit, wenn man immer Tabellen von der verschiedenen Größe und Eintheilung der Gewichte in den vornehmsten Handelsstädten in Europa, der Längen, Maaße in den

Ländern bei der Hand haben muß, um nicht in Irrthum zu gerathen; weil es nicht möglich ist, sie alle im Gedächtniß zu behalten. Es haben zwar einige berühmte Geometer, als Bouguer *), Condamine **) ein allgemeines Maas vorgeschlagen, man hat ihnen aber bis jetzt noch kein Gehör geben wollen.

§. 212. Diejenige Länge, deren sich der Geometer, der Baumeister, der Maurer, der Zimmermann und fast alle Künstler und Handwerker bedienen, um Linien zu messen, wird ein Fuß genennt. Dies Maaß wird gewöhnlich entweder in 12 oder in 10 gleiche Theile getheilt. Der Geometer und Feldmesser bedient sich der letztern Eintheilung; im gemeinen Leben ist aber die zwölftheilige bei Handwerkern mehr im Gebrauch. Bei der Dezimal-Eintheilung nennt man den zehnten Theil eines Fußes, einen Zoll; den zehnten Theil eines Zolles eine Linie, den zehnten Theil einer Linie einen Skrupel ꝛc.

Bei der zwölftheiligen oder Duodezimal-Eintheilung nennt man den zwölften Theil eines Fußes ebenfalls einen Zoll, den zwölften Theil eines solchen Zolles eine Linie, den zwölften Theil einer Linie einen Skrupel ꝛc.

Dieser Fuß, oder vielmehr die eigentliche Länge und Größe des in einem Lande, in einer Stadt ꝛc. angenommenen Fußes ist nun zwar ob

*) Fig. de la Terre. p. 300.
**) Voy. de la Rivière des Amazones p. 202 & suiv.

einerley; allein die Zolle, Linien ꝛc. sind verschieden, daher giebt es immer zeitversplitternde und ermüdende Reduktionen, und man ist in der That im eigentlichen Verstande genöthigt, das zu suchen, was man schon hat.

§. 213. Wenn Linien von einer beträchtlichen Länge zu messen sind, so würde man oft sehr große Zahlen bekommen, wenn man sich blos des Fußes bedienen wollte. Man nimmt daher einige Füße zusammen und macht daraus ein neues Maas oder eine neue Einheit, die man eine Ruthe nennt. Hat man ganze Länder zu vermessen, so bedient man sich einer andern Einheit, die man Meile nennt und eine große Anzahl Füße oder Ruthen enthält. Ist aber die Frage, die Entfernung der Weltkörper zu bestimmen, so ist dem Astronomen auch die Meile zu klein, er nimmt alsdenn den Halbmesser der Erde zum Maasstab; aber auch oft ist dieser noch keine schickliche Einheit, und er ist genöthigt, Millionen von Meilen zusammen zu nehmen, um die Entfernung der Weltkörper und der unendlichen Anzahl von Planetensystemen in bequemen Zahlen auszudrücken, von der jeder Stern so wie die Sonne der Mittelpunkt ist.

§. 214. Die Ruthen sind so verschieden als die Füße. In Frankreich machen 6 Pariser Fuß eine Ruthe oder Toise; in Deutschland hingegen hat eine Ruthe gewöhnlich zwölf Fuß, so wie sie in dem Lande mit zu dem Orte

angenommen sind. Doch werden hin und wieder auch wohl 15, 16 und mehrere Fuße auf eine Ruthe gerechnet. An den mehresten Orten bedient man sich sowohl der rheinländischen Ruthe als des rheinländischen Fußes. Und eine rheinländische Ruthe ist eine Länge oder eine Linie, die aus zwölf rheinländischen Fußen besteht.

§. 215. Diese Ruthe theilt der Geometer und der Feldmesser in zehn gleiche Theile, und nennt den zehnten Theil einer Ruthe einen Dezimal-Fuß. Einen solchen Fuß theilt er in 10 Zolle, 10 Linien ꝛc. und nennt sie Dezimal-Zolle, Dezimal-Linien ꝛc. Ein Dezimal-Fuß ist daher nicht allein größer als ein gewöhnlicher Fuß, sondern auch jeder Zoll, jede Linie ꝛc. ist größer als ein Zoll, eine Linie ꝛc. wenn der Fuß in 12 Zoll, 12 Linien ꝛc. getheilt wird; und selbst größer als ein Zoll, eine Linie, wenn der Fuß in 10 Theile getheilt wird; weil §. 212 die Füße gleich angenommen, und 12 Füße in 10 Dezimalfüße verwandelt worden.

§. 216. Ehe der Geometer, der Feldmesser oder sonst Jemand an einem Orte eine Messung vornimmt, muß er sich vorher genau erkundigen, was für ein Fußmaß daselbst gebräuchlich ist, und wie viel Fuß auf eine Ruthe gerechnet werden. Hat er dies festgesetzt, so hängt es hernach von ihm ab, ob er die daselbst gebräuchliche, z. B. die Duodezimal-

mal-Eintheilung beibehalten, oder sich der Dezimal-Eintheilung bedienen will. Für allen Dingen muß er aber die verschiedenen Arten von Fußmaaßen kennen, und dazu dient folgende Tabelle.

Es wird dabei angenommen, daß der Pariser Fuß in 14400 gleiche Theile getheilt ist, und von diesen enthält alsdann:

h. Amstammer	12578	Eslinger Stadt	
Anspracher	13200	Schuh	12800
Augsburger	13129	Feld-Schuh	12203
Basler	13260	Florentinische	
Berliner	13730	Braccl	25845
Bayreuther	12918	Frankfurt a. M.	12700
Berner	13150	Genfer	21630
Bologneser	16860	Gießensche	13200
Braunschw.	12650	Haager	14400
Bremer	12820	Hollischer	13200
Breslauer	12600	Hamburger	12700
Brester	12900	Hannöverischer	12953
Calenberger	12956	Harlemmer	12670
— —	12990	Heidelberger	12275
— —	12953	Hildesheimer	12445
Elbinger	12590	Holsteiner	13376
Constantinopl.	31400	Königsberger	13640
Cyprauer	15800	Leipziger	12520
Dänischer	14034	Lissabonen	13875
Danziger	12715	Londner	13511
Erfurter	12510	— —	18515

— —	13513	neues Römische	
Lübecker	12870	oder Palmo	9903
Manheimer	12865	Rostocker	12820
Mecklenburger	12896	Rotterdammer	13835
Münchner	12825	Russische	13856
Neapolitaner	11615	Schwedische	13159
Nürnberger	13467	Stettiner	12530
Osnabrücker	12375	Strasburger	12820
Paduaer	18990	Turiner	22770
Pariser	14400	Ulmer	12955
Prager	13360	Venetianische	15400
Rheinländisch	13913	— —	15396
Rigaer	12160	Wiener	14011
Römischer alter	13090	— —	14017
		Würtemberger	12780
— —	15060	Zürcher	13300

In der Folge werden wir sehen, wie man einen Fuß in den andern verwandeln kann.

§. 217. Zur Ausmessung der Flächen nimmt man eine gewisse Fläche zum Maas, und zwar die Fläche eines Quadrats. Ist die Seite eines solchen Quadrats ein Fuß, so heißt es ein Quadratfuß; ist diese Seite eine Ruthe, so heißt es eine Quadratruthe ꝛc. und hieraus ergiebt sich von selbst die Bedeutung eines Quadratzolles, einer Quadratlinie ꝛc. Hierbei kommt eben wie vorhin die Duodezimal- und Dezimal-Eintheilung vor. Wird nemlich die Ruthe in 12 gleiche Theile getheilt, so nennt man das Quadrat, dessen Seite ein

ein solcher Theil oder Fuß ist, einen Duodezimal-Quadratfuß; wird aber die Ruthe in 10 Fuß getheilt, so ist ein Quadrat, dessen Seite ein solcher Fuß ist, ein Dezimal-Quadratfuß. Nunmehr wird man leicht verstehen, was Duodezimal-Quadratzolle, Linien ꝛc. und Dezimal-Quadratzolle, Linien ꝛc. bedeuten.

Ein und zwanzigste Stunde.

Werkzeuge zur Messung gerader Linien.

§. 218.

So einfach eine gerade Linie ist, und so leicht es zu sein scheint, sie zu messen oder ihre Länge zu bestimmen, so schwer ist es doch, wenn es in der Ausübung mit der größten Genauigkeit geschehen soll. Man gebe sich aber noch so viel Mühe, man wende noch so viel Zeit, Geduld und Sorgfalt an, so wird man doch nie diejenige erreichen, die der Geometer verlangt. Alles, was man erwarten kann, ist: das Messen so einzurichten, daß man

sich

sich der geometrischen Schärfe so viel als möglich nähert, damit der Fehler, der dabei begangen wird, gegen das Ganze in keine Betrachtung kommt. Dis hängt nun nicht allein von der Geschicklichkeit und Kenntniß des Geometers selbst, sondern auch von den Werkzeugen und der Wahl ab, die er zu machen weis, in jedem Falle die schicklichsten und besten zu wählen.

§. 219. Zur Messung gerader Linien bedient man sich gewöhnlich dreierlei Werkzeuge; des **Maasstabes**, der Meßkette und der Meßschnur.

Fig. 132. Der Maasstab CD ist eine ohngefähr 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll breite und $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll dicke viereckigte Stange von gutem dauerhaften ausgetrockneten Tannen- oder Büchenholze, auf der man eine gewisse Anzahl Füße so genau als möglich verzeichnet und sie durch zarte Einschnitte in Zolle und Linien eintheilt. Die Länge ist willkührlich. Diejenigen, welche man bei sich tragen will, läßt man gewöhnlich von 2 oder 3 Fuß machen und so einrichten, daß man sie zusammenlegen und in die Tasche stecken kann. Die größern sind 6, 10 bis 12 Fuß lang. Länger macht man sie selten, weil sie sonst zu unbequem sein würden.

Fig. 130. §. 220. Soll nun eine Linie AB gemessen werden, so legt man den Maasstab dergestalt auf diese Linie, daß der Punkt C auf A, und der Punkt D irgendwo auf einen andern Punkt E falle; geht weiter und legt den Punkt C wieder

auf

auf E, damit der Punkt D auf F falle; und so fährt man fort, bis man an den Punkt B kömmt: soweiß man die Anzahl der Schuhe, Zolle und Linien, welche die Linie AB enthält.

Diese Art, mit dem Maasstabe die Länge einer Linie zu bestimmen, ist in der That die genaueste, und wenn die Linie AB nicht zu lang ist, so wird man sich derselben immer bedienen: daher sie auch bei Aufführung der Gebäude von Maurern und Zimmerleuten, und überhaupt von allen Handwerkern gebraucht wird, welche Messungen vornehmen müssen. Allein wenn die zu messende Linie sehr lang ist, so würde sie viel Zeit erfordern und beschwerlich sein, wenn man nicht aus besondern Ursachen und Absichten diese allen übrigen vorzieht. So gebrauchte Picard einen Maasstab von 12 Pariser Fuß, als er die Länge eines Grades des Meridians in Frankreich bestimmen wollte; weil er sich in dieser Absicht der geometrischen Schärfe besonders und so genau als möglich nähern mußte. Wo aber, wie gewöhnlich bei den meisten Vermessungen, eine so außerordentliche Genauigkeit nicht erfordert wird, da bedient man sich mit mehrerem Vortheil der Meßkette, die gewöhnlich eine Länge von 5 Ruthen enthält.

§. 221. Die Meßkette besteht aus einer gewissen Anzahl runder eiserner Stäbe AB, CD, die ohngefähr so dick wie ein Federkiel, an beiden Enden umgebogen und durch Ringe D, F von geschla

schlagenem Meßing mit einander verbunden werden. Wenn die Kette gut gearbeitet ist, so müssen die Mittelpunkte zweier unmittelbar auf einander folgender Ringe genau um einen Decimalfuß entfernt
Fig. 133. sein, wenn man, wie gewöhnlich, die Ruthe in 10 Theile theilt. (§. 214.)

Die einzelnen Ruthen werden auf der Kette durch große Ringe angedeutet. Um sie auch leicht
Fig. 134. unterscheiden zu können, so werden durch die Mittelpunkte derselben kleine Querriegel Z gezogen, wie in der Figur zu sehen ist.

An den beiden Enden der Kette wird ein gro-
Fig. 133. ßer Ring A von Meßing, von ohngefähr $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser, angebracht, damit man durch dieselbe die sogenannten Kettenstäbe stecken kann.

Fig. 135. Diese Kettenstäbe sind etwa 4 Fuß lange runde Stäbe, und nur so dicke, daß man die an der Kette befindlichen Ringe an sie herunterlassen kann. In der 135 u. 136 Figur sieht man das untere Ende derselben M.

Das untere Ende ist ohngefehr 2 Zoll hoch mit Eisen beschlagen, von der Grundfläche angerechnet, und mit einem Stift m versehen, der auf beiden Seiten hervorragt, damit der Ring A an jedem Ende der Kette, wenn er heruntergelassen wird, darauf ruhen kann.

An der Seitenfläche dieses Stabes wird ein
Fig. 135. eiserner sich in eine Spitze endender, ohngefehr 3 Zoll langer und oben $\frac{1}{4}$ Zoll dicker Stift NO

befe-

befestigt, und zwar dergestalt, daß wenn man den Ring A heruntergelassen und den Kettenstab eingesetzt hat, die Spitze O gerade unter dem äußersten Punkt des Ringes A zu liegen komme, weil man von demselben anfängt die Ruthen zu zählen.

Dies hat etwas unbequemes an sich. Es wäre daher gut, wenn man die Ruthen von dem Mittelpunkt des Ringes A an rechnete. Alsdenn könnte man den Stift NO gerade unter dem Mittelpunkte der Grundfläche des Kettenstabes anbringen, so daß er allemal unter dem Mittelpunkt des Ringes zu liegen käme.

Die einzelnen Füße sind auf der Meßkette nicht in Zolle getheilt; weil in allen den Fällen, wo diese gebraucht wird, einige Zolle mehr oder weniger eine Kleinigkeit sind, die in Ansehung der Linien, die man mißt, in keine Betrachtung kömmt. Will man sie indeß auch in Rechnung bringen, so muß man einen kleinen Maasstab von 1, 2 oder 3 Fuß mitnehmen, auf dem die Füße auch in Zolle getheilt sind.

§. 222. Ehemals bediente man sich der Meßschnuren, die von Hanf verfertigt waren. Allein sie hatten den Fehler, daß sie sich bei warmen Wetter, Kälte und Feuchtigkeit bald ausdehnten, bald verkürzten. Diesen Mängeln suchte man zwar durch Sieden in Wachs und Oel abzuhelfen, allein auch dadurch erreichte man seinen Zweck nicht völlig.

Indeß

Indeß haben sie den Vortheil, daß man sie von geringer Dicke und sehr lang machen, um einen Stock wickeln und bequem mit sich führen, auch leicht an allen Orten, wo nur ein Seiler ist, bekommen kann. Man muß sie daher nicht ganz verwerfen, und kann sie in manchen Fällen mit sehr großem Vortheil gebrauchen, besonders wenn man keine übertriebene Genauigkeit verlangt; und diese Fälle kommen häufig vor.

Die Abtheilungen der Fuße und Ruthen werden auf dieser Schnur durch eingebundene Knoten oder durch andere schickliche und leicht in die Augen fallende Kennzeichen bemerkt.

§. 223. Außer diesen zum Messen bequemen Werkzeugen hat die Natur jeden Menschen ein sehr bequemes und keine Kosten verursachendes Maaß zugetheilt. Dieses ist der Schritt, dessen man sich bei gewissen Gelegenheiten, wo keine gar zu große Schärfe erfordert wird, bedienen kann, und diese kommen im Kriege häufig vor. Unter allen Arten, die Längen gerader Linien zu bestimmen, ist dis gewiß die geschwindeste. Man muß sich indeß durch eine wiederholte Uebung einen gleichförmigen Schritt anzugewöhnen suchen, und wenn man so weit gekommen ist, bestimmen, wie viel Ruthen, Fuße und Zolle eine gewisse Anzahl unserer Schritte, z. B. 50, 80 oder 100, ausmachen. Alsdenn wird man die Länge einer Linie durch Schritte beinahe so genau bestimmen können als durch die Meßkette oder Meßschnur.

§.

§. 134. Nachdem wir dieses Instrument kennen gelernt, wird es nicht schwer sein

auf einer ebenen Fläche eine gerade Linie mit der Meßkette auszumessen.

Ich will annehmen, AN sei eine auf dem Felde abgesteckte Linie, wie §. 3 gezeigt worden, und ab, cd, ek ꝛc. die Stäbe, welche sie bestimmen. Ist nun A der Punkt, von dem angefangen werden soll, so nimmt man die Meßkette mit den dazu gehörigen Kettenstäben, sie mögen nun wie Fig. 135 oder Fig. 138 beschaffen sein; zwei Kettenzieher stecken sie durch die äußersten Ringe, und der vorangehende Kettenzieher versieht sich mit einer gewissen Anzahl, gemeiniglich 10 Stück kleiner Hängestäbe 1 Fuß langer Stäbchen oder Pflöckchen.

Fig. 137.

Nachdem auf diese Art alles in Ordnung gebracht worden, so setzt der erste Kettenzieher, den ich K nennen will, den Kettenstab in den Punkt A, von dem die Linie angerechnet werden soll, der zweite, der L heißen soll, geht mit der Kette gegen N so weit fort, bis die Kette ganz ausgespannt ist, und richtet sich durch Hülfe des ausgesteckten Stabes cd, ek in der Linie AN.

Ist L auf diese Art die B bestimmt, so steckt er den Kettenstab in den Punkt B so viel möglich perpendikulär ein; hält etwas seitwärts und hält ihn frei in der Hand, damit der hintere Kettenzieher K sehen könne, ob der Kettenstab und

 sein

folglich die ganze Kette auch genau in der Linie AN liegt.

Trift dies nicht genau zu, so ruft der hintere Kettenzieher K dem vordersten zu, den Kettenstaab mehr rechts oder links zu stecken, bis er findet, daß er in der geraden Linie AN steht.

Ist dies geschehen, so steckt der vorderste Kettenzieher L in das Loch B, welches die Spitze des Kettenstaabes gemacht hat, einen von den kleinen Pfählchen, die er bei sich hat. Beide Kettenzieher heben die Kette etwas in die Höhe, und gehen weiter vorwärts, bis K an den Punkt B kommt, den er an dem eingesteckten Pfählchen erkennt.

Alsdenn ruft er dem vordersten L zu, halt! zieht das kleine Pfählchen heraus, setzt den Kettenstaab in das Loch, und beide richten sich in der Linie AN wie vorhin. Wenn dies geschehen, so hebt der vorderste Kettenzieher L den Kettenstaab in die Höhe, steckt in das Loch C, wo er gestanden, wieder einen von den bei sich habenden kleinen Pfählchen, der hinterste zieht den Kettenstaab ebenfalls aus, und beide gehen weiter.

Auf diese Art wird so lange fortgefahren, bis sie gegen den Punkt F kommen, wo die Linie aufhört. Wenn nun der vorderste Kettenzieher bei dem vorletzten Punkt E gewahr wird, daß das letzte Stück EF der Linie nicht völlig die Länge einer Kette betragen möchte, so geht er doch mit der Kette über F hinaus bis G, und beide verfahren eben so als wenn die Linie noch bis G fortginge.

Als-

Alsdenn aber zählt der hinterste Kettenzieher auf der Kette, wie viel Ruthen, Fuß, und wenn man will, Zolle das Stück EF enthält.

Der hinterste Kettenzieher zieht ferner das in E steckende kleine Zeichenpfählchen aus, und nun überzählt er die bei sich habenden kleinen Pfählchen. So viel er davon bei sich hat, so viel mal enthält die Linie AF die Länge der ganzen Kette bis E und noch die Seite EF.

Gesetzt, er hätte sieben kleine Pfählchen, und gefunden, daß das Stück EF 3 Ruthen, 4 Fuß 7 Zoll betrüge, so wäre die ganze Länge der Linie AF 38 Ruthen 4 Fuß 7 Zoll, wenn die Kette 5 Ruthen lang ist.

§. 225. Man hat übrigens angenommen, die Ruthe mit dem Zeichen o oder (o, den Fuß mit einem Strich, die Zolle mit zwei Strichen „ ꝛc. zu bezeichnen und sie rechter Hand der Zahlen etwas in die Höhe zu setzen, welche sie ausdrücken. Auf diese Art würde die Länge der Linie so geschrieben werden:

$$AF = 38^{(o}\ 4,\ 7''$$

§. 226. Eben so verfährt man, wenn man statt der Kette eine Meßschnur nimmt. Alles dies aber setzt eine vollkommne Ebene voraus, und doch findet man diese auf dem Felde im eigentlichen Verstande gar nicht. Es ist in der That unmöglich, eine gerade Linie auf dem Felde mit der Kette genau zu messen, besonders wenn die Gegend sehr gebirgig ist. Sind aber die Ungleichheiten nicht

beträchtlich, so werden die Fehler, die bei dem Messen begangen werden, von keinem großen Belange sein. Dis wird man leicht einsehen lernen, wenn wir die Anwendung der Geometrie auf die Vermessung ganzer Länder machen werden. Wenn übrigens während des Kettenziehens kleine Anhöhen vorkommen, so heben die Kettenzieher die Kette an den äußersten Stäben etwas in die Höhe, damit sie darüberweggehe und spannen sie so viel möglich horizontal aus. Gehen die abgesteckten Linien über hohe und steile Berge, so bedient man sich mit besserm Erfolge der Maasstäbe von 12 Fuß, wodurch man zugleich den Vortheil erhält, daß man die Höhen der Berge so ziemlich genau bestimmen kann. Wenn man übrigens bei der Aufnahme einer Gegend lediglich die militärische Genauigkeit zur Absicht hat, so kann man mit der Meßkette und dem gewöhnlichen Schritt fast überall auskommen; wenn man nur einen richtigen Begrif von einer militärischen Karte hat, und eine schön gezeichnete Karte von einer richtigen Karte zu unterscheiden weiß.

Zwei-

Zwei und zwanzigste Stunde.

Winkelmesser.

§. 127.

Die im 171ten Paragraph gemachte Bemerkung giebt Mittel an die Hand, die Größe eines Winkels genau zu bestimmen und ihn mit einem andern gegebenen zu vergleichen. Das Werkzeug, das unter dem Namen Winkelmesser, Transporteur bekannt ist, ist nichts anders als ein aus dem Mittelpunkt A mit einem willkührlich angenommenen Halbmesser AB beschriebener halber Zirkel, der in eine gewisse Anzahl gleicher Haupttheile und jeder von diesen in kleinere getheilt wird. Es hing lediglich von der Willkühr desjenigen ab, der zuerst auf diesen Einfall kam, in wie viel gleiche Theile er den ganzen oder halben Zirkel theilen wollte. Die Geometer aber wählten die Zahl 360 und theilten den ganzen Zirkel in eben so viel gleiche Theile, die man Grade nennt. Um kleinere Theile zu bekommen, theilt man jeden Grad in 60 gleiche Theile, und nennt jeden eine Minute; jede Minute theilt man in 60 Sekunden, jede Sekunde in 60 Terzen ꝛc. und so kann man wenigstens in Gedanken ohne Aufhören fortgehen. Man gab der Zahl 360 den Vorzug, weil sie sich durch alle Zahlen bis 10 genau theilen läßt, die Zahl 7 allein ausgenommen.

Fig. 138.

§. 222. Ein Winkel von 90° oder ein rechter Winkel ist daher einerlei; $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels oder 60° auch einerlei ꝛc. Diese Theilung macht indeß dem Künstler viel Schwierigkeiten, weil sich der 360ste Theil eines Zirkels oder ein Grad nicht geometrisch finden läßt; daher wäre es besser gewesen, wenn man den vierten Theil eines Zirkels oder einen rechten Winkel in 96 Theile getheilt hätte. Alsdenn könnte man den 96sten Theil durch ein nach und nach fortgesetztes Halbiren der Winkel finden. Man beschreibe nemlich mit einem willkührlichen Halbmesser AB einen Zirkel, und über den Halbmesser AB ein gleichseitiges Dreieck ABC, so ist der Winkel ABC = 60° oder $\frac{2}{3}$ eines rechten Winkels, weil alle Winkel zusammengenommen zweien rechten Winkeln oder
Fig. 2 mal 90 Graden, das ist, 180 Graden gleich
239. sind. (§. 52 und 99.) Richtet man daher in dem Mittelpunkt A die Linie AD perpendikulär auf, so ist DAC der dritte Theil eines rechten Winkels, den man auf diese Art leicht findet. Theilt man nun den Bogen DC oder den Winkel DAC in zwei, den dadurch entstehenden Winkel wieder in 2 ꝛc. gleiche Theile, so erhält man nach und nach $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{96}$ eines rechten Winkels auf eine leichte, bequeme und sichere Art.

Dieser Theilung bedient man sich auch schon hin und wieder, wenn von der wirklichen Theilung der Werkzeuge die Frage ist. Man ist aber doch genöthigt, diese Theile in die gewöhnlichen Grade,

Minuten ꝛc. zu verwandeln, weil alle Tafeln, die zur Erleichterung der Rechnung gebraucht werden, sich auf die Eintheilung des Zirkels in 360 Grade gründen, und sich wohl nicht leicht jemand finden wird, der die Mühe über sich nähme, sie umzuarbeiten und der Theilung des rechten Winkels in 96 Theile oder des ganzen Zirkels in 384 Grade anzupassen.

§. 229. Der Bequemlichkeit wegen bezeichnet man die Grade mit einer Null (°) die Minute mit einem Strich (′) die Sekunden mit zwei Strichen (″) und setzt sie oben rechter Hand an die Zahlen, welche die Winkel ausdrücken. Man pflegt auch die halben, Viertel ꝛc. Grade in Minuten und Sekunden anzugeben; so schreibt man statt fünf und dreißig und drei Viertel Grad:

35° 45′

Statt sechs und funfzig Grad fünf und zwanzig und $\frac{1}{10}$ Minuten

56° 25′ 18″

weil $\frac{1}{10}$ Minute 6 Sekunden $= \frac{60}{10}$″ ist, und so in allen Fällen.

§. 230. Der vorhin erwähnte Transporteur ist gewöhnlich eine dünne Platte von Meßing oder Elfenbein, und besteht aus zwei mit einander verbundenen Theilen: aus einer ohngefehr $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ Zoll breiten, zwischen zwei aus dem Mittelpunkt A beschriebenen halben Zirkeln eingeschlossenen Platte BCD und einem Lineal BDEF, dessen eine Seite BD den Halbmesser dieses Zirkels anzeigt und durch Fig. 138.

den Mittelpunkt A geht, und bei Num. B [illegible] über den Zirkel vorspringt. Diese Zirkelplatten sind durch Linien, die aus dem Mittelpunkt gezogen werden, in 180 gleiche Theile oder Grade, auch öfter, wenn es die Größe des Werkzeuges zuläßt, in halbe und viertel Grade getheilt. Bei dem äußern Zirkel machen die Zahlen von 10 zu 10 Grad von der Rechten zur Linken, bei dem innern aber von der Linken zur Rechten auf der Platte gestochen, und darin findet man leicht die zwischenliegende halbe, halbe und viertel Grade. Bei dem Mittelpunkt A ist ein kleiner Einschnitt, damit man diesen desto besser unterschreiben und auf einen gegebnen Punkt legen könne. Bei einigen dergleichen Werkzeugen befindet sich ein Lineal HG, das sich um den Mittelpunkt A drehen läßt, dessen eine Seite HG durch den Mittelpunkt A gehen muß. Diese Einrichtung hat einige Vortheile. In den sogenannten Reißzeugen findet man gewöhnlich einen von diesen beiden.

Fig. 140.

§. 221. Durch Hülfe dieses Transporteurs ist es nunmehr leicht

Fig. 141.

Einen gegebenen Winkel PQR auf dem Papier zu messen.

Man lege den Transporteur auf die Linie PQ oder RQ dergestalt, daß der Mittelpunkt A genau auf die Spitze Q des Winkels und die Linie AB auf PQ oder RQ falle; halte ihn in dieser Lage fest, und schiebe das Lineal so lange fort, bis die Seite HG desselben die Linie QR oder

PQ

PQ bedeckt, und zähle alsdenn die Grade, welche zwischen den Schenkeln PQ, QR eingeschlossen sind, so weis man die Größe des Winkels.

§. 232. Soll man hingegen auf dem Papiere

Einen Winkel von einer gegebnen Größe z. B. von 56 Graden zeichnen

So ziehe man eine gerade Linie PQ, lege auf sie den Transportour dergestalt, daß die Linie AB auf PQ und der Mittelpunkt A auf den Punkt Q falle, der die Spitze des Winkels seyn soll: zähle von B bis D die Anzahl der Grade, z. B. 56 ab, oder schiebe das Lineal HG auf 56 Grad, und bestimme dadurch den Punkt R, durch den der andere Schenkel des Winkels gehen muß: so ist der verlangte Winkel gezeichnet.

§. 233. So verfährt man auf dem Papiere; aber auf dem Felde und bei andern Gelegenheiten, wo man Winkel messen soll, würde sich dies nicht so thun lassen. Indeß ist das sogenannte Graphometer oder Astrolabium ꝛc. dessen man sich bei dem Aufnehmen bedient, im Wesentlichen nichts anders als ein solcher Transporteur, der auf ein Gestelle oder Stativ gesetzt wird.

Es besteht nemlich ein solches Astrolabium 1) aus einer ebenen Fläche oder Platte BHD von Messing, auf der ein aus dem Mittelpunkt A beschriebener Zirkel in 180 Grade getheilt ist. 2) Aus einem Lineal GH, das sich um den Mittelpunkt A dreht und die Alhidaden-Regel genannt Fig. 144.

 wird,

wird, 3) aus einem unbeweglichen Lineal BD, das den Zirkel hält und ebenfalls durch den Mittelpunkt A geht.

An den äußersten Enden dieser Lineale sind sogenannte Absehen oder Dioptern angebracht. Diese sind dünne Platten von Messing 4 bis 5 Zoll lang, einen Zoll breit, und haben gewöhnlich die Gestalt eines länglichen Vierecks. Von den bei B und D, G und H einander gegenüberstehenden ist eine oben die andere unten ausgeschnitten. In dem vollen Theil wird ein feiner Riß eingesägt, oder es werden verschiedene Löcher in einer geraden Linie über einander eingebohrt; in dem ausgeschnittenen aber in der Verlängerung des eingesägten Risses oder der eingebohrten Löcher ein feines Haar, eine feine Darmseite, oder ein feiner Draht ab eingespannt.

Fig. 142.

Diese Dioptern werden gewöhnlich so an dem Werkzeuge befestigt, daß sie sich durch Hülfe eines Charniers niederlegen lassen. Wenn sie aufgerichtet sind, müssen sie auf der Fläche des Instruments oder auf der Fläche des Zirkels BHD perpendikulär und so gesetzt seyn, daß wenn man die Linie, in der die Einschnitte und Fäden liegen, bis auf die Fläche des Winkelmessers verlängert, und alsdenn durch die Punkte B und D, G und H die geraden Linien BD, GH zieht, diese sich genau in dem Mittelpunkt A durchschneiden.

Das bewegliche Dioptern-Lineal oder die Alhidaden-Regel muß sich genau um den Mittelpunkt

punkt A drehen lassen, und ihre Bewegung sanft und gleichförmig seyn; der geringste Fehler hierbei macht die Messung der Winkel unzuverlässig.

An den äussersten Enden dieses Lineals ist ein Einschnitt, dessen eine Seite in der Linie GH fällt, um die auf dem Winkelmesser gefundenen Grade zählen zu können, welche sonst das Lineal bedecken würde; bei einigen ist es ganz ausgeschnitten und hat in der Linie GH einen Zeiger oder Weiser z; bei andern hat es einen Vorsprung z, der in der verlängerten Linie GH liegt. Fig. 143.

Bei dem Gebrauch wird der Winkelmesser durch Hülfe einer an demselben unten angebrachten Hülfe auf ein Gestelle oder Stativ gesetzt, das mit drei Füßen versehen ist, die sich an einander legen lassen. Die Verbindung mit dem Gestelle kann auf vielerlei Arten geschehen; das Wesentlichste dabei ist, daß, wenn der Winkelmesser angeschraubt ist, das ganze Werkzeug fest stehe, und wenn die Schrauben gelöst werden, der Winkelmesser sich nach allen Seiten frei und dabei mit einer sanften und gleichförmigen Bewegung herumdrehen läßt. Fig. 144.

§. 334. Ich beschreibe hier nur die wesentlichsten Theile dieses Werkzeuges. Alles übrige und die Kunstgriffe der Verfertiger derselben, um ihm Bequemlichkeit und die noch möglich zu erreichende Genauigkeit zu geben, lassen sich am besten zeigen, wenn man verschiedene vor Augen hat und sie nach allen Theilen zergliedert. Jeder Künstler

Er fügt auch gemeiniglich demselben eine Beschreibung bei, wenn er eine von der gewöhnlichen abweichende Einrichtung dabei angebracht hat. So bedient man sich häufig der Fernröhre statt der Dioptern, so bald man nach weit entfernten Gegenständen visiren will. Man kann übrigens über diese Werkzeuge Joh. Tobias Meyers gründlichen und ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie im 1ten Theile nachlesen.

Da auch das Werkzeug zum Gebrauch auf dem Felde nicht zu groß seyn darf, so muß der Halbmesser des Zirkels nicht über 6 bis 7 Zoll seyn. Alsdenn aber erstreckt sich die Theilung nicht weiter als auf ganze und halbe Grade. Einzelne Minuten aber lassen sich nicht angeben. Dies hindert aber nicht, daß man nicht auch wenigstens bis auf 2 Minuten richtig messen könnte. Denn bei guten Winkelmessern kann auf der Alhidaden-Regel eine sogenannte Theilung nach dem Nonius oder Vernier angebracht werden, wodurch man in Stand gesetzt wird, bis auf 2 Minuten, und wenn man will, auch bis auf eine Minute die Winkel richtig zu messen. Ich führe dies nur blos an, und werde die Erklärung davon weiter unten geben. Bei gewöhnlichen Messungen kann man zufrieden seyn, wenn man die Winkel nur bis auf halbe Grade richtig erhält. Denn wenn man sie auch selbst bis auf einzelne Minuten bekommen könnte, so würde man sie doch nicht

mit

mit dieſer Genauigkeit auf dem Papier zeichnen können.

§. 235. Mit dem Winkelmeſſer oder Aſtrolabium einen Winkel auf dem Felde zu meſſen.

Es ſei z. B. M ein Baum, N ein Thurm und O der Punkt, wo man ſich befindet, und den Winkel MON meſſen ſoll. Fig. 147.

Man ſetze den Winkelmeſſer auf das Stativ, dergeſtalt, daß der Mittelpunkt deſſelben ſo genau als möglich über den Punkt O zu liegen kommt, und die Fläche deſſelben ſo viel möglich horizontal ſey. Bei den gewöhnlichen Meſſungen entſcheidet dis das Auge; wo eine größere Genauigkeit erfordert wird, erfährt man dies durch eine kleine Setzwage.

Man richte das unbeweglichē Diopter-Lineal DB nach einem von dieſen Gegenſtänden, z. B. nach M, lege das Auge an dem Einſchnitt oder an einen von den Löchern bei D, und drehe das Inſtrument ſo lange, bis man gewahr wird, daß der in der gegenüberſtehenden Diopter B ausgeſpannte Faden oder Draht den Gegenſtand oder Punkt M genau bedeckt.

So bald dis iſt, ſchraube man das Inſtrument feſt an dem Stativ, damit es ſich nicht verrücke, und drehe das bewegliche Lineal oder die Alhidaden-Regel GH ſo lange herum, bis das an dem Einſchnitt bei G (Fig. 145.) oder bei H (Fig. 146.) angelegte Auge ſieht, daß der in

ter gegen über stehenden Diopter ausgespannte Faden oder Drath den Gegenstand oder Punkt N bedeckt.

So zeigt der Zeiger oder Einschnitt auf der Alhidaden-Regel bei H die Größe des Winkels MON in Graden ꝛc. die von dem Punkt B, wo gewöhnlich o steht, bis H fortgezählt werden.

Bei der 145sten Figur sieht man dies gleich; in der 146sten aber, wo der Winkelmesser eine entgegengesetzte Lage hat, ist der Winkel BAH dem Winkel MON gleich, weil es vertikel oder Scheitel-Winkel sind. (§. 27.)

Drei und zwanzigste Stunde.

Die Bußole.

§. 236.

Gewöhnliche Feldmesser bedienen sich bei Ländervermessungen gern der Bußole, und machen gegen Unkundige viel Aufhebens davon; der Geometer aber selten und nie anders als unter sehr großen Einschränkungen. Damit man indeß von dem Werthe dieses Werkzeuges urtheilen könne, so

so will ich die Gründe angeben, auf die es beruht. Die Erfahrung nämlich lehrt folgendes:

Wenn man eine stählerne Nadel mit einem Magnete bestreicht und sie so einrichtet, daß sie sich frei auf einem Stifte herumdrehen kann, so setzt sie sich von selbst in eine Richtung, die mit den Mittagslinien solcher Oerter, die nicht weit von einander liegen, beinahe einerlei Winkel macht, aber nur beinahe, und eine Spitze derselben zeigt nach Norden, die andere nach Süden.

Weil nun die Mittagslinien auf der Oberfläche der Erde als parallel angesehen werden, so sind die Linien, welche die Richtung der Magnetnadel angiebt, auch mit einander beinahe parallel.

Denn wenn MT, M′T′, M″T″ die Mittagslinien der Orte A, B, C und NS, N′S′, N″S″ die Richtung der Magnetnadel an diesen Orten sind, so sind nach der Erfahrung die Winkel NAM, N′BM′, N″CM″ einander gleich. Weil aber auch MT, M′T′ parallel sind, und man zieht die Linie BA und verlängert sie, so sind auch die Winkel PAM, PBM′ einander gleich, (§. 106.) folglich auch PAM — NAM = PBM′ — M′BN′ oder PAN = PBN′ (§. 14. n. 3.) folglich die Linien NA oder NS, N′B oder N′S, parallel. (§. 105.) Eben so beweist man auch, daß die Linie CN″ mit AN parallel ist.

Der

Der Winkel NAM heißt die Abweichung der Magnetnadel, und diese ist entweder westlich oder östlich, nachdem die Linie NA auf der West- oder Ostseite der Mittagslinie MT liegt.

Fig. 148. §. 237. Man setze nunmehr die Magnetnadel ik auf einen sehr spitzen Stift v, so daß sie darauf frei spielen und sich nach allen Orten herumdrehen kann, schließe sie in ein rundes Gehäuse von Messing lpq ein und bedecke es mit einer gläsernen Scheibe, um die Nadel vor dem Winde sicher zu halten. Dies Gehäuse befestige man auf einer viereckigten Platte fmnn und verbinde es mit einer Regel PQ, die mit der Platte aus einem Stücke bestehen kann und mit Dioptern PK, QL versehen ist. An der innern Seitenwand des Gehäuses befestige man in einer kleinen Entfernung vom Boden, parallel mit der Ebene fmnn, einen Ring, durch dessen Mittelpunkt der spitze Stift c, um den sich die Nadel bewegt, als eine Axe geht. Dieser Ring muß mit der Magnetnadel in einer Ebene liegen. Theilt man diesen Ring in 360 Grade, so zeigt die Nadel, indem sie sich um die Axe dreht, die Abtheilungen auf dem Ringe oder die Grade.

Das Ende i der Magnetnadel, welches nach Norden zeigt, macht man dabei so spitz als möglich; das entgegengesetzte Ende k aber, welches gegen Süden gerichtet ist, läßt man gemeiniglich stumpf, um beide bei dem ersten Anblick von einander

oder zum unterscheiden. Damit auch die Nadel nicht herabfalle, so ist sie bei c mit einem sogenannten Hütchen versehen, welches auf dem Stift ruhet.

Die Visierlinie vt des Diopter-Lineals PQ muß mit dem Durchmesser des eingetheilten Ringes, welcher durch 0° und 180° geht, sehr genau parallel sein, damit, wenn die Spitze i der Nadel 0° weiset, die Visierlinie tv mit der Richtung der Nadel parallel sei.

Die Nadel bekömmt wenigstens eine Länge von 5 Zollen, und wird aus dem besten und reinsten Stahl verfertigt, den man blau anlaufen läßt.

Die innere Höhlung des Hütchens muß sehr glatt polirt sein, und kontisch in eine sehr kleine Kugelfläche zu laufen; die Are der innern kegelförmigen Höhlung des Hütchens auf der Ebene der Nadel und der Stift auf der Grundfläche des Gehäuses perpendikulär sein.

Die wesentlichste Eigenschaft der Nadel besteht darinn, daß sie nicht faul ist, das will sagen: wenn sie in Ruhe ist und man nähert sich ihr mit einem Stückchen Eisen, z. B. mit der Spitze eines Messers, so muß sie gleich anfangen in Bewegung zu kommen oder zu spielen, wie man es nennt.

Bei dem Gehäuse wird gewöhnlich ein Schieber angebracht, durch den man die Magnetnadel von dem Hütchen abheben und sanft an das Glas drücken kann, damit sie bei dem Hin- und Hertragen

der Bußole keinen Schaden leide. Uebrigens fällt leicht in die Augen, daß die Bußole ebenfalls auf einen Stativ oder auf eine Fläche gesetzt werden müsse, wenn man sich derselben bedienen will.

Dies ist im Ganzen die wesentlichste Einrichtung der Bußole; auf die Beschreibung besonderer Vorrichtungen kann ich mich hier der Kürze wegen nicht einlassen. Es ist wichtiger, den Gebrauch derselben zu zeigen, und wie man es anfängt.

§. 236.

Einen Winkel auf dem Felde mit der Bußole zu messen.

Fig. 149. Wenn man den Winkel BAC messen will, den die geraden Linien, die von den Gegenständen B, C nach A gezogen werden können, bei diesem Punkt einschließen; so setze man die Bußole in oder über den Punkt A, lasse die Magnetnadel spielen und richte die Dioptern PK, QL zuerst nach dem Punkt B. Alsdenn warte man so lange, bis die Magnetnadel in Ruhe kömmt und in der Richtung NS stehen bleibt. Hierauf merke man sich den Winkel NAB, der hier z. B. 63° sein mag.

Wenn dies geschehen, so richte man die Dioptern nach dem zweiten Punkt C, warte wieder, bis die Magnetnadel in Ruhe kömmt, und zähle die Grade, welche zwischen den Linien NA und AC eingeschlossen sind, oder die Grade, welche der

Winkel

Winkel NAC enthält, welche z. B. 108° sein mögen.

Hieraf ziehe man den Winkel NAB von NAC ab, so bleiben 43° für den Winkel BAC übrig.

§. 237. Fiele die Richtung NS der Magnet- Fig. nadel zwischen die Schenkel BA, CA des Win- 150. kels BAC, und der Winkel NAB enthielte, z. B. 31°, der Winkel NAC 96°, so würde man sie addiren müssen, um den Winkel BAC zu bekommen, der alsdenn

$$NAB + NAC = 31° + 97°$$

oder $BAC = 127°$

sein würde. Dies alles fließt aus dem vorhergehenden, ohne daß wir uns lange mit dem Beweis aufhalten dürfen.

§. 238. Man begreift leicht, daß die Richtigkeit der Messung auf den Umstand beruhe, daß die Magnetnadel bei jeder Veränderung, die mit der Bußole vorgenommen wird, sich wieder genau in die Linie NS setzt. Es darf daher kein Eisen oder Stahl in der Nähe sein, weil diese Metalle die wahre Richtung der Magnetnadel verändern; und diese Vorsicht, alles Eisen und Stahl zu entfernen, ist desto nöthiger, je empfindlicher die Nadel ist. Aus dieser Ursache müssen an den Werkzeugen, wo man Magnetnadeln anbringt, alle Schrauben und übrige Stifte nicht aus Eisen und Stahl, sondern aus andern Metallen verfertiget werden.

Bei dem Gebrauch der Bussole muß man ferner genau darauf sehen, daß die Magnetnadel allemal eine vollkommne Horizontal Lage bekomme, weil sie sonst nicht frei spielen, und es geschehen kann, daß sie sich nicht allezeit in die vorige Richtung setzt.

Beides schränkt der Geometer bei dem Gebrauch dieses Instruments sehr ein, daher bedient er sich bei seinen Meßungen lieber des Astrolabiums oder des Meßtisches, den ich jetzt beschreiben will.

Der Meßtisch.

Fig. 151. §. 238. Dies Werkzeug ist das einfachste, wohlfeilste und bequemste, weil man jede Figur auf dem Felde mit allen ihren einzelnen Bestimmungen zu Papier bringen kann. Die beste Einrichtung desselben ist diejenige, welche ihm der Professor Meyer in dem ersten Theil seiner bereits angeführten Geometrie gegeben, und ich daraus entlehnen will.

Die Figur stellt den Meßtisch in perspektivischen Aufriß vor. A ist ein gewöhnliches Reißbret von gutem ausgetrockneten Lindenholze verfertigt, dergestalt, daß es nicht aus einem einzigen zusammenhängenden Brette besteht, sondern aus mehrern Stücken so zusammengesetzt ist, daß die Holzfasern sich beständig durchkreuzen, damit sich der Tisch nicht werfe oder Risse bekomme. Das Pa-

pier

pier wird an den vier schmalen Seiten des Meßtisches mit Mund- oder Tischlerleim bes festigt.

Das Stativ des Tisches besteht 1) aus dem hölzernen Zylinder H Fig. 151 und Fig. 152. der sich in ein dreieckiges Prisma endigt, an dessen Seitenflächen die Füße des Stativs F, F, F um die Axen g, g, g beweglich sind, und vermittelst der Schrauben r, r, r in einer unveränderlichen Lage gehalten werden.

2) Aus der hölzernen Vorrichtung M, Fig. 151 und 152, die mit drei Armen c, c, c und einer starken hölzernen Schraube w versehen ist, die auf dem Zylinder H angeschraubt wird. Durch diese Arme gehen drei hölzerne oder besser meßingne Schrauben y, y, y, die man bis unter das Tischblatt schrauben kann. Sie dienen dem Tisch sowohl zur Stütze als ihn in einer horizontalen Lage zu erhalten.

3) Wie man dem Tischgen die nöthige Horizontalbewegung verschaft, zeigt die 153te Figur im Profil. ccc ist der Durchschnitt einer runden meßingenen Platte a, welche man in Fig. 154 sieht, wo der Meßtisch in einer umgekehrten Lage vorgestellt ist. Diese Platte a umgiebt der kupferne Ring ddd, davon dd Fig. 153. der Durchschnitt ist. Dieser Ring wird durch drei Schräubchen i, i, i an die innere Fläche des Tisches AA befestigt. Die innere Fläche dieses Ringes, welcher die Platte a umgiebt, muß genau abgedreht und

mit letztere in einandergeschmiegt seyn, damit sich der Ring ddd mit dem daran befindlichen Tischblatte AA sanft um die Platte a herumwenden lasse.

4) Die Platte αα besteht mit dem Zylinder n aus einem Stück. Dieser Zylinder n ist innerhalb der Höhlung eines andern meßingnen Zylinders beweglich, der sich in eine Nuß m endigt, die sich in einer ihr zugehörigen sie scharf umfassenden Hülse herumwenden läßt, welche sich an einer runden Platte hh befindet, die durch Schräubgen auf die Vorrichtung M Fig. 152 befestigt wird.

Die Schraube x, welche durch den äußern Zylinder geht, dienet, den innern Zylinder n in einer unverrükte Lage zu erhalten.

Fig. 153. 5) An der runden Platte a ist ein kleiner Arm V angelöthet. Dieser trägt einen Absatz e, und eben so hat auch das Tischgen AA einen dergleichen bei o. Fig. 154. Durch diese beiden Absätze e, o geht eine Stellschraube ze. Sie dienet, der Fläche des Meßtisches eine sanfte horizontale Wendung zu geben.

6) Wenn man nun den Meßtisch, Fig. 151, in eine horizontale Lage bringen will, so verrücke man die Füße des Stativs so lange, bis das Tischblatt AA nach dem Augenmaße ohngefehr horizontal steht. Hierauf drehe man die Schrauben y, y, y herunterwärts, damit sie nicht hinderlich sind, wenn

wenn man die Nuß in ihrer Hülse herumwenden will.

Man wende alsdenn die Nuß in ihrer Hülse so lange herum, bis eine kleine auf das Tischblatt AA gestellte Wasserwage den Horizontalstand desselben angiebt. Hierauf schraube man die Schrauben y, y, y wieder sanft bis unter das Tischblatt, so wird sich dasselbe unverrückt in seiner horizontalen Lage erhalten.

Diese Wasserwage ist ein kleines, zylindrisches Gefäß A, welches oben mit einem Glasdeckel bcd und unten mit einer kleinen Schraube g versehen ist. Man füllt das Gefäß mit Wasser ganz voll, läßt einen Tropfen durch die Schraube g heraus, und verschließt es wieder. Wenn nun der Glasdeckel bcd mit dem Boden parallel ist und auf den Tisch gesetzt wird, so wird sich bei einer horizontalen Stellung desselben ein Luftbläsgen gerade unter den mittelsten Punkt i des Deckels setzen, der daher auch darauf angezeigt sein muß. Daher man den Tisch so lange in der Nuß herumwenden muß, bis dies geschiehet. Fig. 155.

7) Hat endlich der Tisch eine horizontale Stellung, so kann man ihn horizontal herumwenden, wenn man die Schraube x, Fig. 159., löset. Alsdenn nemlich wird der an der Platte ecc befindliche Zylinder n in der Höhlung des ihn umgebenden äußern Zylinders beweglich sein und dem Tisch eine horizontale Bewegung um die Axe verschaffen.

Außer dieser groben Horizontalbewegung erhält man eine sanfte, wenn man die Schraube x wieder anzieht und hierauf die Schraube zc, Fig. 154, herumwendet; alsdenn treibt diese den Meßtisch AA mit dem daran befindlichen Ringe ddd sanft um die unbewegliche Platte a herum, und giebt dem Tischgen eine sanfte Horizontalwendung.

§. 230. Bei dem Gebrauch des Meßtisches muß man noch ein Diopter-Lineal haben. Dies wird aus Meßing oder gutem trockenem Birnbaumholz verfertigt und an den äußersten Enden mit den Dioptern PK, QL versehen, die sich aufrichten und niederlegen lassen, und wenn sie aufgerichtet sind, auf der Fläche des Lineals senkrecht stehen müssen. Es ist 1½ bis 2 Fuß lang und 1 bis 2 Zoll breit. Die Fläche, in der die in den Dioptern ausgespannten Fäden liegen, muß auf der Fläche des Lineals ebenfalls perpendikulär, und die Linie ab, in der sie diese Fläche durchschneiden, oder die Visirlinie mit der Seite CD, des Lineals genau parallel sein. An diesem Lineal wird ein anderes EN befestigt, dessen Seiten EF, MN mit den Seiten des Lineals PQ genau parallel sein müssen, so daß, wenn beide an einander liegen, die Seite EF sich genau an der zunächstliegenden Seite des Lineals PQ anschließt. cd sind zwei Charnire, die um die Punkte c d beweglich sind, damit man das Lineal EN, indem man das Lineal PQ fest hält, sanft hin und her bewe-

Fig. 156.

gen

gen könne. Auf dem Lineal PQ kann man auch in einem länglichen Kästgen G eine Magnetnadel anbringen, um dadurch die Lage der Linien in Rücksicht auf die vier Weltgegenden zu bestimmen.

Weil der Meßtisch allezeit horizontal gesetzt werden muß, und man daher Gegenstände, die unter dem Horizont sind, nicht sehen kann, so pflegt man auch wohl das Diopter-Lineal so einzurichten, daß die Diopter PK, QL nicht auf der Fläche stehn, die auf den Meßtisch gelegt wird, sondern auf einer andern, die mit derselben parallel ist und höher liegt. Dies Lineal PQ wird auf der Mitte des untern durch Hülfe eines kleinen Fußes IK befestigt, um den es sich bei k vertikal auf und nieder bewegen läßt. Bei allen diesen Bewegungen aber muß die Fläche, in der sich die ausgespannten Fäden in den Dioptern befinden, stets der Fläche des untern Lineals perpendikulär bleiben, und der Durchschnitt derselben mit der Fläche des untern Lineals der Seite CD oder EF eben dieses Lineals parallel seyn. Fig. 157.

Statt des obern Lineals bedient man sich auch öfters eines Fernrohrs, in dessen Brennpunkt zwei Fäden ausgespannt sind, die sich rechtwinklich durchschneiden.

§. 240. Die Abmessungen des §. 238 beschriebenen Meßtisches sind ohngefähr folgende.

Das Tischblatt AA lang u. breit $1\frac{1}{2}$ Fuß = 18 Zoll
dick — 1 Zoll
Länge der Arme c, c, c — 5 Zoll
Dicke

Dicke	=	$1\frac{3}{4}$ Zoll
Durchmesser des Zylinders H	=	ohngefar 3 Zoll
Durchmesser der Platte a	=	$2\frac{2}{3}$ Zoll
Durchmesser des Ringes ddd	=	3 Zoll
Länge des innern Zylinders n	=	2 Zoll
Die ganze Höhe von eee bis am Ende der Nuß	=	$3\frac{1}{2}$ Zoll
Länge des an der Platte a befindlichen kleinen Armes V	=	3 Zoll
Länge der Stellschraube ze	=	$2\frac{1}{2}$ Zoll
Dicke derselben	=	$1\frac{1}{2}$ Zoll

Wenn die Schrauben y, y, y von Holz gemacht werden, so müssen sie einen Zoll im Durchmesser haben. Die Abmessungen der übrigen kleinen Theile sind größtentheils willkührlich, und es hängt von dem Mechanikus ab, ihnen die schikliche Größe und Stärke zu geben.

§. 241. **Mit dem Meßtisch einen Winkel auf dem Felde zu messen.**

B, C mögen zwei Gegenstände und A ein Punkt sein, wo man den Winkel BAC messen will, den die von den Gegenständen bis an den Punkt A gezogenen geraden Linien BA, CA einschließen.

Man stelle den Meßtisch über den Punkt A auf und bringe ihn in eine horizontale Lage. Hiem auf bezeichnd man auf dem Tische den Punkt A, der die Spitze des Winkels sein soll.

Man richte das Diopter-Lineal PQ nach dem Punkt B, und wenn es sich genau in der Linie PB befindet, so halte man es fest, schiebe das bewegliche

liche Lineal EN ganz sanft bis an den Punkt A und ziehe die Linie AN mit Bleistift.

Man richte sodann das Diopter-Lineal PQ nach dem andern Gegenstand C, und wenn es die gehörige Lage hat, so schiebe man das bewegliche Lineal wieder bis an den Punkt A, und ziehe die Linie AC, so ist BAC der verlangte Winkel.

§. 242. Im strengsten geometrischen Verstande findet man auf diese Art den Winkel BAC nicht genau, weil bei dem Verfahren angenommen wird, daß die Linie ABC mit PB parallel ist, welches sich in der That nicht so verhält. Denn der wahre Winkel BAC ist der äußere, und daher größer als der Winkel BDC §. 55, oder vielmehr der Winkel BAC ist den beiden BDC und PBA zusammengenommen gleich. (§. 100.) Der Unterschied ist also der Winkel DBA, aber dieser ist um so kleiner, je weiter der Gegenstand B von A entfernt ist. Denn wenn B um 100 Schritt von A entfernt ist, so beträgt er ohngefehr 3 Minuten; eine Größe, die bei praktischen Arbeiten in keine Betrachtung kömmt. Man muß wohl noch größere Fehler zulassen.

Uebrigens muß der Tisch in einer unverrükten Lage erhalten werden. Will man wissen, ob er sich verrükt hat, so lege man das Diopter-Lineal wenn man den Winkel gefunden hat, noch einmal an die Linie AB. Bedecken alsdenn die ausgespannten Fäden den Gegenstand B, so hat sich der Tisch nicht verrückt. Bedecken sie ihn nicht, so

muß

muß man den Fehler zu verbessern suchen. Wenn man nicht an den Tisch stößt, so verrückt er sich so leicht nicht.

§. 242. Dies sind die gewöhnlichsten Werkzeuge. Sie haben alle die Unbequemlichkeit, daß man sie bei dem Gebrauch auf Stative setzen muß. Der Officier aber kann im Kriege oft in Fälle kommen, wo ihm ein Stativ sehr lästig werden würde. Besonders kann der Schiffer zur See, der sehr oft zur Bestimmung der Länge und Breite der Oerter, wo er sich befindet, die Höhen der Sonne und der Sterne nehmen muß, das dazu nöthige Werkzeug nicht auf ein Stativ setzen, weil es die schwankende Bewegung des Schifs nicht erlaubt. Um in diesen Fällen nicht in Verlegenheit zu gerathen, hat man verschiedene Werkzeuge mit Spiegeln, so wohl für den Feldmesser auf dem Lande als für den Seemann, welche man frei in der Hand halten und so die verlangten Winkel messen kann. Für den Schiffer ist besonders der Halleische Octant unentbehrlich. Weil aber die Beschreibung dieser Art Winkelmesser einige Kenntniß der Optik voraussetzt, und überhaupt etwas weitläuftig seyn würde, so kann ich mich darauf nicht einlassen. In Prof. Meyers bereits angeführter Geometrie kann man sie nachsuchen.

Vier und zwanzigste Stunde.

Verhältnisse.

§. 243.

Aus dem Vorhergehenden ist es nunmehr leicht, die eigentliche Bedeutung des Ausdrucks: Verhältniß, zu bestimmen. Denn die Verhältniß der Größe A zu der Größe B ist nichts anders als die Art, wie die Größe A aus der Größe B, oder die Art, wie die Größe B aus der Größe A entsteht, man mag nun die Vergleichung unmittelbar anstellen oder eine dritte Größe, z. B. das Maaß, dabei zu Hülfe nehmen.

§. 244. Um nicht den Ausdruck, A verhält sich zu B oder C verhält sich zu D, alle Augenblick zu wiederholen, bedient man sich der Bequemlichkeit wegen zweier Punkte, die man über einander und zwischen die Größen setzt, deren Verhältnisse man anzeigen will. Daher will

A:B oder C:D

nichts weiter sagen als A verhält sich zu B, C verhält sich zu D, oder die Verhältniß A zu B, die Verhältniß C zu D.

§. 245. Eine andere Abkürzung, deren man sich zur Bequemlichkeit und zur Vermeidung der Weitläuftigkeit bedient, besteht darinn, daß man das Multipliziren und Dividiren durch schickliche Zeichen ausdrückt.

1) Wenn man nemlich anzeigen will, daß 3 durch 5 multiplizirt werden soll, doch aber die Multiplikazion aus gewissen Ursachen noch nicht vornehmen will, so setzt man einen Punkt zwischen diese Zahlen und schreibt 3. 5. Will man anzeigen, daß die Zahlen 3, 5, 8 in einander multiplizirt werden sollen, so schreibt man 3. 5. 8 u. s. w. Daher ist 3. 5 so viel als 15, 3. 5. 8 so viel als 120, welches man zuweilen auch so ausdrückt

3. 5 = 15

3. 5. 8 = 120

2) Soll eine Zahl durch eine andere dividirt werden, man will aber die Division aus gewissen Ursachen noch nicht vornehmen, so setzt man unter die Zahl, welche dividirt werden soll, einen Strich, und unter diesen Strich den Divisor oder Theiler. Z. B. wenn 18 durch 6 dividirt wird, so schreibt man $\frac{18}{6}$ ꝛc. daher rührt auch die bekannte Art Brüche zu schreiben.

§. 246. Wenn man Zahlen nicht bestimmt, sondern es freistellt, was man für welche nehmen will, so bezeichnet man sie blos durch Buchstaben, die man nach Gefallen nehmen kann, es mögen lateinische, griechische oder deutsche seyn. Wenn man also sagt, die Zahl m, die Zahl n, die Zahl p ꝛc. so bedeutet dies, daß man für diese Buchstaben nach Gefallen Zahlen nehmen kann, z. B. 3, 7, 11, 13 oder 5, 9, 2, 6, 1, 0, 8 ꝛc. und selbst Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{13}{18}$ ꝛc. hat man aber einem Buchstaben eine gewisse Bedeu-

deutung oder den Werth einer gewissen Zahl beigelegt, so muß man diesen so lange behalten, als man bei eben der Voraussetzung bleibt.

Was vorhin §. 245 von dem Zeichen der Multiplikazion und Division gesagt werden, findet daher auch hier statt. Daher bedeutet

m. n oder m. n. p ꝛc.

daß man die Zahlen, die man sich unter m, n, p vorstellt, in einander multipliziren soll.

Eben so bedeutet $\frac{m}{n}$ daß man die Zahl, die man sich unter m vorstellt, durch die Zahl, die man sich unter n vorstellt, dividiren soll. Oder es bedeutet einen Bruch, dessen Zähler die Zahl m und dessen Nenner n ist.

$\frac{m.\ p}{n.\ q}$ bedeutet, daß man das Produkt aus der Zahl m in die Zahl p durch das Produkt aus der Zahl n in die Zahl q dividiren soll. Oder es bedeutet einen Bruch, dessen Zähler das Produkt aus der Zahl m in die Zahl p, und der Nenner, das Produkt aus der Zahl n in die Zahl q ist. Man wird also die Bedeutung von

$\frac{m.\ p.\ q}{n.\ r.\ s.\ t}$ oder $\frac{m.\ p}{n.\ r.\ s.\ t.\ u}$ ꝛc.

leicht verstehn.

§. 274. Wenn Brüche in einander multiplizirt werden sollen, so wird dies eben so angezeigt,

zeigt: z. B. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ bedeutet, daß $\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{7}$ multiplizirt werden sollen.

Soll hingegen $\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{7}$ dividirt werden, zeigt man dies so an: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$

Weil auch bei der Multiplikazion der Brüche Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner; bei der Division hingegen der Zähler des zu dividirenden Bruchs durch den Nenner des Divisors und der Nenner des ersten durch den Zähler des letztern multiplizirt werden, so schreibt man auch $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$ und $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$ oder $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{24}$ und $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{14}{15}$

so daß auf der linken Seite das Verfahren nur angezeigt, auf der rechten aber wirklich vorgenommen worden.

Nimmt man statt der Zahlen wieder allgemeine Zeichen, so bedeuten $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ oder $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$ daß die Brüche $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ ꝛc. in einander multiplizirt werden sollen; und daher ist auch

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

oder $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{f} = \frac{m \cdot p \cdot r \text{ ꝛc.}}{n \cdot q \cdot s}$

Eben

Eben so bedeutet $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}}$ daß der Bruch $\frac{m}{n}$ durch den Bruch $\frac{p}{q}$ dividirt werden soll, und wenn man auf der einen Division wirklich vornimmt, so ist

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{m.q}{n\ p}$$

§. 248. Oft zeigt man auch die Multiplikazion der Zahlen, die durch Buchstaben ausgedrückt werden, blos dadurch an, daß man die Buchstaben neben einander setzt und die Punkte wegläßt. Man schreibt nemlich statt m. n. p blos mnp, oder statt $\frac{m.p}{n.q}$ blos $\frac{mp}{nq}$

Alsdenn aber muß man sich hüten, daß man diese neben einander geschriebenen Buchstaben nicht mit andern vermischt, die Linien, Winkel oder andere Größen bedeuten, weil sonst oft eine große Verwirrung entstehen würde. Sodann muß man die Punkte entweder wieder herstellen, wenn man Zahlen in die Stelle der Buchstaben setzt oder die Multiplikazion selbst wirklich vornehmen.

z. B. wenn man in dem Ausdruck mnp die Zahl $m = 3$, $n = 7$, $p = 11$ setzte, so muß man nicht schreiben 371.1, sondern 3. 7. 11, das will sagen $mnp = 3.7.11 = 231$, welches von 3711 sehr unterschieden ist. Daher ist es in allen Fällen rathsamer, sich der Punkte zu bedienen.

§. 249. Wenn man eine gewisse Größe A einigemal nehmen oder durch eine Zahl multipliziren soll, so setzt man die Zahl nur blos vor die Größe, oder einen Punkt zwischen der Zahl und der Größe. Demnach bedeutet 3 A oder 3. A, daß die Größe, die man sich unter A vorstellt, dreimal genommen, oder durch 3 multiplizirt werden soll. Ueberhaupt wenn die Größe A durch die Zahl m oder durch die Zahlen m, n, p multiplizirt werden soll, so schreibt man:

mA oder m. A; mnpA oder m. n. p. A,

Soll hingegen A in eine gewisse Anzahl, z. B. in 5 gleiche Theile, oder überhaupt in m gleiche Theile, oder welches einerlei, durch die Zahl 5 oder m getheilt werden, so schreibt man dis

$$\frac{A}{5} \text{ oder } \frac{A}{m} \text{ oder } \frac{1}{m}A$$

Die Bedeutung $\frac{2}{3}$ A oder $\frac{2}{3}$A, $\frac{2}{5}$A, $\frac{3}{4}$A oder überhaupt von $\frac{m}{n}$ A oder $\frac{mA}{n}$, $\frac{m.p}{n.q}$ A, fällt daher leicht in die Augen

§.

§. 250. Man kann etwas oft sehr abkürzen und dadurch anschaulicher und begreiflicher machen, wenn man von Zahlen, die in einander multiplizirt oder dividirt werden, oder Größen, die durch Zahlen multiplizirt oder dividirt werden, einige durch eine andre Zahl oder Größe ausdrückt. Z. B. wenn man die Zahl m. n. p. q hat, so kann man m. n = M, oder m. n. p = N setzen, und denn verwandelt sich das Produkt im ersten Fall in p. q. M, im zweiten in q. N oder es ist

m. n. p. q = p. q. M,

oder m. n. p. q = q. N.

Hätte man hingegen die Größe m. n A, so kann man n A = B setzen, und denn verwandelt sie sich in mB, oder es ist m. n. A = mB.

Hätte man $\frac{nA}{m}$ und man setzte nA = C, so verwandelt sie sich in $\frac{C}{m}$ oder es ist $nA = \frac{C}{m}$

Hätte man die Größen $\frac{n. p. A}{m. q}$ und man setzt nA = B, so würde sie sich in $\frac{pB}{m.q}$ verwandeln. Setzte man hingegen n. p. A = C, so würde sie sich in $\frac{C}{m.q}$ und wenn man $\frac{A}{m.q} = D$ setzte, in n. p. D verwandeln.

§. 251. Wenn eine Größe A oder Linie zweien Größen gleich ist, oder $A = B + C$, und man nimmt die Größe A so oft als die ganze Zahl m Einheiten hat, so ist die Größe, welche daraus entsteht, der Summe der Größe gleich, welche man bekömmt, wenn man jede von den Größen B und C so oft nimmt, als die Zahl m Einheiten hat.

oder es ist

$$mA = mB + mC,$$

Denn es ist $m A = B + C + B + C + B + C$ &c. bis man rechter Hand des Zeichens ($=$) die Größen B und C so oft gesetzt hat, als die Zahl m Einheiten hat. Demnach kommt rechter Hand jede der Größen B und C, m mal vor.

Demnach ist auch

$$m A = m B + m C.$$

Eben so beweiset man auch, daß wenn $A = B - C$

$$m A = m B - m C$$

ist.

§. 252. Wenn die Größe A der Summe der Größen B und D gleich ist, oder $A = B + C$, und man theilt A in so viel gleiche Theile als die Zahl m Einheiten hat, so ist die daraus entstehende Größe der Summe der Größen gleich, welche man bekömmt, wenn man die Größen B und C in eben so viel gleiche Theile theilt, als die Zahl m Einheiten hat, oder es ist

A

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{m} + \frac{C}{m} = \frac{B+C}{m}$$

Gesetzt $\frac{A}{m}$ wäre nicht der Summe der beiden Größen $\frac{B}{m}$ und $\frac{C}{m}$ gleich, so mag $\frac{A}{m} = \frac{B}{m} + E$ sein. Setzt man nun $\frac{B}{m} = D$ so wird

$$\frac{A}{m} = D + E$$

folglich ist $m \cdot \frac{A}{m} = mD + mE$ §. 251,

oder $A = mD + mE$

Es ist aber $mD = B$.

Demnach ist $A = B + mE$;

folglich auch $B + C = B + mE$

nimmt man Gleiches von Gleichen weg, so ist §. 14. n. 3.

$$C = mE$$

oder $E = \frac{C}{m}$.

Demnach ist $\frac{A}{m} = \frac{B}{m} + \frac{C}{m}$

Eben so beweist man auch, daß wenn

$$A = B - C$$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{m} - \frac{C}{m}$$

ist.

§.

§. 253. Wenn übrigens eine Größe A durch verschiedene Zahlen multiplizirt wird, z. B. durch 3 und 5, so ist es einerlei, ob man die Größe erst 5 mal, und alsdenn die dadurch hervorgebrachte Größe 3 mal, oder ob man A zuerst 3 mal und die dadurch entstehende Größe noch 5 mal nimmt: oder überhaupt es ist

$$m.nA = n.mA$$

wenn m und n ganze Zahlen bedeuten.

Denn nA heißt weiter nichts als: man soll die Größe A so oft nehmen, als Einheiten in der Zahl n sind, oder es ist

$$nA = A + A + A + \text{ꝛc.}$$

und die Zahl der rechter Hand stehenden A ist n.

Demnach ist $m.nA = mA + mA + mA + \text{ꝛc.}$ und die Anzahl der rechter Hand stehenden Größen mA ist ebenfalls n.

Nimmt man nun diese alle zusammen, so entsteht daraus offenbar die Größe n. mA. oder es ist

$$mA + mA + mA + \text{ꝛc.} = n.mA.$$

Demnach ist auch $m.nA = n.mA$. §. 14. n. 1.

§. 254. Es ist daher auch $m.n.pA = m.p.nA$, oder $m.n.pA = n.m.pA$, oder $mnpA = p.n.mA$.

Denn $n.pA = p.nA$. §. 253.

Demnach 2) $m.n.pA = m.p.nA$.

Man

Man setze ferner m. p = q (§. 250.) so ist m. p. nA = q. nA. §. 14. n. 7

allein q. nA = n. qA §. 253

oder 2) m. n. pA = n. m. pA.

Man setze nun m. p. = r, so wird n. m. pA = r A §. 14. n. 1. und n. m. pA. = n. rA.

Nun ist m. p. A = p. mA. §. 253.

Demnach rA = p. mA.

n. rA = n. p. mA

n. m. pA = n. p. mA (§. 14. n. 3.)

Das ist 3) m. n. pA = n. p. mA.

Wenn daher eine Größe A durch verschiedene Zahlen multiplizirt wird, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die Zahlen unter sich und mit der Größe multiplizirt werden.

§. 255. Wenn daher A selbst eine Zahl und die Einheit (1) ist, so ist dies zugleich ein Beweis, daß das Produkt verschiedener Zahlen, die in einander multiplizirt werden, einerlei bleibt, man mag die Zahlen in dieser oder in einer andern Ordnung mit einander multiplizieren. So ist z. B. das Produkt aus den Zahlen 3, 5, 7, 9 in einander beständig 945, oder es ist:

3. 5. 7. 9 = 3. 7. 5. 9 = 3. 5. 9. 7 = 5. 7. 9. 3 ꝛc. = 945.

§. 256. Wenn man eine Größe A, m mal nimmt, oder durch eine ganze Zahl m multiplizirt und die dadurch entstehende Größe

m A in so viel gleiche Theile theilt, als die ganze Zahl n Einheiten hat, so ist die Größe, welche dadurch entsteht, einerlei mit der Größe, welche man bekömmt, wenn man erst die Größe A in n gleiche Theile theilt, und diesen Theil m mal nimmt, oder durch m multiplizirt, oder es ist

$$\frac{mA}{n} = m.\frac{A}{n}$$

Denn $mA = A + A + A +$ &c. so daß sich rechter Hand des Zeichens (=) die Größe A so oft befindet, als Einheiten in m sind. Demnach ist

$$\frac{mA}{n} = \frac{A}{n} + \frac{A}{n} + \frac{A}{n} +$$ &c. §. 242.

und die Größe $\frac{A}{n}$ befindet sich rechter Hand, so oft als Einheiten in m sind. Folglich ist auch

$$\frac{mA}{n} = m.\frac{A}{n}$$

§. 257. Wenn eine Größe A in m gleiche Theile getheilt, oder in so viel gleiche Theile getheilt ist, als die ganze Zahl m Einheiten enthält, und ein solcher Theil soll wieder in so viel gleiche Theile getheilt werden als die ganze Zahl n Einheiten enthält: so ist die Größe, welche dadurch entsteht, einerlei mit der Größe, welche man bekömmt, wenn

wenn man die Größe A durch das Produkt aus den Zahlen m und n dividirt oder in so viel gleiche Theile theilt, als das Produkt aus den Zahlen m und n Einheiten enthält. Oder es ist

$$\frac{\frac{A}{m}}{n} = \frac{A}{m.n.}$$

Man setze $\frac{A}{m} = B$, so enthält A die Größe B so oft, als die Zahl m Einheiten hat; oder es ist

$$A = mB$$

Demnach $\frac{A}{n} = \frac{mB.}{n}$

allein $\frac{mB}{n} = m\frac{B}{n}$ §. 256.

Setzt man nun $\frac{B}{n} = C$ §. 250.

so wird $\frac{mB}{n} = mC$

Demnach $\frac{A}{n} = mC$ §. 14. n. 1.

das will sagen, die Größe mC ist der nte Theil von A, folglich ist

$$A = n.m.C.$$

oder die Größe A enthält die Größe C so oft als

das Produkt aus den Zahlen n und m Einheiten hat, daher ist

$$C = \frac{A}{n.m}$$

oder $$\frac{B}{n} = \frac{A}{n.m}$$

das ist $$\frac{\frac{A}{m}}{n} = \frac{A}{n.m}$$

§. 258. Wenn man eine Größe A in so viel gleiche Theile theilt, als die Zahl n Einheiten hat, so ist jeder Theil der nte von A, oder es ist

$$\frac{A}{n} = \frac{1}{n} \cdot A$$

Denn die Größe A enthält den nten Theil n mal, oder wenn man $\frac{1}{n} A = B$ setzt, so ist $A = nB$, folglich

$$\frac{A}{n} = B$$

oder $$\frac{A}{n} = \frac{1}{n} A$$

§. 259. Es ist daher auch $\frac{mA}{n} = \frac{m}{n} \cdot A$

Denn

Denn weil $\frac{mA}{n} = m. \frac{A}{n}$ §. 256 und $\frac{A}{n} = \frac{1}{n} A$. §. 258.

so ist auch $\frac{mA}{n} = m. \frac{1}{n} A$ oder

$\frac{m}{n} A = \frac{1}{n} A + \frac{1}{n} A + \frac{1}{n} A +$ ꝛc.

so daß $\frac{1}{n} A$ rechter Hand so oft genommen wird, als die Zahl m Einheiten hat. Demnach, ist die Größe rechter Hand $\frac{m}{n} . A$,

folglich $\frac{mA}{n} = \frac{m}{n} . A$.

§. 260. Es ist daher auch $\frac{m.p.}{n.q} A =$

$\frac{m.p}{n} \frac{A}{q} = \frac{m.p}{q} \frac{A}{n} = \frac{m.p}{q.n} A =$

$\frac{m}{q} . \frac{pA.}{n}$

Denn wenn man $m. p. = k$ und $n. q = l$ setzt, so wird

$\frac{m.pA}{n.q} = \frac{k.A}{l} = k. \frac{A}{l}$

Nun ist $\frac{A}{l} = \frac{A}{n.q} = \frac{\frac{A}{q}}{n}$ §. 257.

Setzt man nun $\frac{A}{q} = B$, so wird

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{n}$$

und $k.\frac{A}{l} = k.\frac{B}{n} = \frac{k.}{n} B$ §. 259.

oder $\frac{m.p.A}{n.q.} = \frac{k}{n}.\frac{A}{q}$

Das ist $\frac{m.p.A}{n.q.} = \frac{m.p}{n}.\frac{A}{q}$

Auf eine ähnliche Art lassen sich die folgenden Sätze beweisen.

§. 261. Ich habe diese verschiedene Arten von Ausdrücken lieber beweisen als voraussetzen wollen, daß sie Anfängern bereits aus der Rechenkunst bekannt sein werden, welches doch sehr selten angenommen werden kann, weil diese Wissenschaft nur mechanisch und auf eine plumpe Art handwerksmäßig gelehrt wird. In der Folge wird sich der Vortheil näher zeigen, wenn wir Gelegenheit haben werden, von dieser Veränderung der Ausdrücke gewisser Größen Gebrauch zu machen.

Sechs und zwanzigste Stunde.

Die Eigenschaften der Proporzionen.

§. 262.

Bei den Verhältnissen kommt es nicht auf die Quantität der Größen, das will sagen, bei Linien, auf ihre Länge, bei Flächen auf ihre Länge und Breite, bei Körpern auf ihre Länge, Breite und Höhe ꝛc. sondern lediglich auf die Art an, wie eine aus der andern entsteht; es sei nun, daß man die Größen selbst mit einander vergleicht, oder eine dritte Größe dabei zu Hülfe nimmt, wie wir beim Messen gethan haben. Ist die Art, wie die Größe A aus der Größe B entsteht, oder wie beide aus einer dritten Größe P entstehen, vollkommen einerlei mit der Art, wie die Größe C aus der Größe D entsteht, oder wie diese aus einer dritten Größe Q entstehn, so ist die Verhältniß der Größen A und B der Verhältniß der Größen C und D gleich, so verschieden sie auch sonst sein mögen.

Daher verhält sich eine Linie von 3 Fuß zu einer andern von 5 Fuß eben so wie eine Linie von 3 Ruthen zu einer Linie von 5 Ruthen; eben so wie eine Linie von 3 Meilen zu einer von 5 Meilen; eben so wie eine Fläche von 3 Quadrat-

fuß

fuß zu einer Fläche von 5 Quadratfuß ꝛc. obgleich zwischen einem Fuß und einer Ruthe, Meile, Quadratruthe ein großer Unterschied ist.

So verhält sich eine Linie von 5 Fuß zu einer andern von 9 Fuß eben so wie eine Fläche von 15 Quadratfuß zu einer andern von 27 Quadratfuß. Denn 5 und 9 Fuß entstehen so aus einem Fuß, wie 15 und 27 Quadratfuß aus einer Fläche, die 3 Quadratfuß groß ist.

Es lassen sich demnach eine unendliche Menge Verhältnisse zwischen ganz verschiedenen Paaren von Größen finden, die einer gegebenen Verhältniß gleich sind.

§. 263. **Ueberhaupt wenn man zwei Größen A und C vor sich hat, sie mögen von einerlei oder von ganz verschiedener Art sein, und man nimmt an, A entstehe auf eine gewisse Art aus einer gewissen Größe P, so kann man allezeit eine Größe finden, aus der C eben so entsteht.**

Denn wenn z. B. $A = 2P$, oder $A = 3P$, oder $A = 4P$ ꝛc. oder $A = \frac{3}{5}P$, oder $A = \frac{4}{9}P$, oder $A = \frac{2\,1}{1\,3}P$ ꝛc. ist, und die Größe C soll aus einer gewissen Größe Q eben so entstehen, als A aus P, so muß C entweder $= 2Q$, oder $C = 3Q$, oder $C = 4Q$ ꝛc. oder $C = \frac{3}{5}Q$, oder $C = \frac{4}{9}Q$, oder $G = \frac{1\,1}{1\,3}Q$ ꝛc. seyn.

Ueberhaupt also, wenn $A = \frac{m}{n}P$, wo m

und

und n ganze Zahlen bedeuten, und C soll aus Q eben so entstehen, wie A aus P, so muß

$$C = \frac{m}{n} Q$$

sein. Die Größe C entsteht also wenn man die Größe Q so oft nimmt als die Zahl m Einheiten hat, und die daraus entstehende Größe in so viel gleiche Theile theilt, als die Zahl n Einheiten hat. Setzt man nun

$$mQ = E$$

so ist $C = \frac{E}{n}$ oder C ist der nte Theil der Größe E. Demnach enthält die Größe E die Größe C so oft, als die Zahl n Einheiten hat, folglich ist

$$n.\ C = E$$

oder $nC = mQ$ (§. 14. n. 1)

Das will sagen, die Größe C so oft genommen, als die Zahl n Einheiten hat, enthält m mal die Größe Q, folglich ist die Größe Q der mte Theil der Größe nC oder

$$\frac{nC}{m} = Q$$

wodurch die Größe Q bekannt wird.

§. 264. Wenn die Verhältniß zweier Größen A und B von einer gewissen Art der Verhältniß der Größen C und D gegen einander gleich ist, sie mögen von eben der Art

oder

oder von einer andern sein, so sagt der Geometer, die Größen A, B, C, D sind proporzional in der Ordnung, wie sie hier auf einander folgen.

Eine Proporzion ist daher die Gleichheit zweier Verhältnisse.

§. 265. Dies wird in der angenommenen Zeichensprache der Kürze wegen so ausgedrückt

A : B = C : D

und will nichts mehr und nichts weniger sagen, als A verhält sich zu B wie C zu D; oder die Verhältniß der Größen A und B ist der Verhältniß der Größen C und D gleich, oder die Größen A, B, C, D sind proporzional. Die Größen A, B, C, D selbst werden die Glieder der Proporzion genannt. A heißt das erste, B das zweite, C das dritte und D das vierte Glied. Auch nennt man A und C die vorangehenden, B und D aber die nachfolgenden Glieder in der Proporzion.

§. 266. Wenn man bestimmen will, ob vier Größen A, B, C, D proporzional sind, so darf man nur untersuchen, ob B aus A eben so entsteht als D aus C (§. 262.)

Dies kann nun auf verschiedene Arten geschehen. 1) Man theile A und C in eine gewisse Anzahl gleicher Theile. Ein solcher Theil von A sei P, von C aber Q. Enthält nun B den Theil P eben so oft als D den Theil Q, so sind die vier Größen proporzional, z. B. wenn A eine Linie von

9 Ruthen, C eine andere von 12 Ruthen, B eine von 15 und D eine von 20 Ruthen sind, so sind diese vier Linien proporzional. Denn wenn man A und C in 3 gleiche Theile theilt, so ist P oder der dritte Theil von A = 3 Ruthen, Q oder der dritte Theil von C = 4 Ruthen. Nun enthält B = 15 Ruthen den Theil P oder 3 Ruthen 5 mal, weil 3. 5 = 15, D aber oder 20 Ruthen enthalten den vierten Theil von C oder 4 Ruthen ebenfalls 5 mal den 4. 5. = 20. folglich ist

9 : 12 = 15 : 20.

2) Man nehme eine willkührliche oder gegebene Größe P zum Maaß der Größen A und B an, und sehe zu, auf welche Art beide aus dieser Größe P entstehn. Sucht man nun eine Größe Q, (§. 263.) die so beschaffen ist, daß C daraus eben so entsteht, wie A aus P, und man findet, daß D aus dieser Größe D eben so wie B aus P entsteht; so sind A, B, C, D ebenfalls proporzional.

Denn es ist z. B. $\frac{2}{3}$P : $\frac{4}{3}$P = $\frac{2}{3}$Q : $\frac{4}{3}$Q. was auch P für Größen sein mögen.

Eben so $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{3}$ = 14 : 12.

Weil 14 = $\frac{2}{3}$. 21 und 12 = $\frac{4}{3}$. 21.

§. 267. Ob vier Größen A, B, C, D proporzional sind, läßt sich also überhaupt so erfahren.

Man suche zwei Größen P und Q, aus den, A und C auf einerlei Art entstehn, es

sei nun, daß man diese Größen findet, indem man A und C in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilt, oder auf eine andere Art. Entstehn nun B und D auf einerlei Art aus P und Q; so sind diese vier Größen proporzional; findet dies aber nicht statt, so sind sie auch nicht proporzional.

§. 268. Wenn daher $A = mP$ und $C = mQ$ und $B = p.P$, so muß $D = p.Q$.

oder wenn $A = \frac{m}{n} P$, $C = \frac{m}{n} Q$

$B = \frac{p}{q} P$, so muß $D = \frac{p}{q} Q$

sein, wenn zwischen diesen Größen eine Proporzion stat finden oder

$$A : B = C : D,$$

sein soll.

§. 269. Wenn sich die Größen B und D aus den Größen P und Q nicht genau herausbringen lassen, so kann man diese Größen selbst in kleinere Theile theilen, und wenn diese noch zu groß sind, mit der Theilung so lange fortfahren, bis die Theile so klein werden, daß wenn man sie gehörig zusammen setzt, endlich die Größen B und D herausgebracht werden. Nemlich

man theile P und Q in so viel gleiche Theile als die Zahl k Einheiten hat, und diese Theile mögen P', Q' sein, so daß

$$P = kP' \text{ und } Q = kQ'$$

ist.

§. Sind diese noch zu groß, so theile man P', Q' wieder in so viel gleiche Theile als die Zahl l Einheiten enthält, und diese Theile mögen P'', Q'' sein, so daß

$$P' = l\,P'' \text{ und } Q' = l\,Q''$$

§. Geht man auf diese Art immer weiter fort, so bekommt man allmählich immer kleinere Größen, weil

$$P' = \frac{P}{k};\quad Q' = \frac{Q}{k}$$

$$P'' = \frac{P'}{l} = \frac{P}{k.l};\quad Q'' = \frac{Q'}{l} = \frac{Q}{k.l}$$

und so weiter.

Findet man nun, daß $B = pP'$, $D = pQ'$
oder $B = p'P''$ $D = p''Q''$,
&c. &c.

es mögen p, p' &c. ganze oder gebrochne Zahlen sein, so ist auch entweder $B = p\,\frac{P}{k}$; $D = p\,\frac{Q}{k}$

oder $B = p'\,\frac{P}{k.l}$; $D = p'\,\frac{Q}{k.l}$
&c. &c.

folglich entstehen B und D aus P und Q auf zweierlei Art.

Am leichtesten wird diese Theilung gemacht, wenn man die Größen P und Q, P', Q' &c.

nach und nach immer in zwei gleiche Theile theilt oder halbirt, so daß

$$P' = \frac{1}{2}P \qquad Q' = \frac{1}{2}Q$$
$$P'' = \frac{1}{4}P \qquad Q'' = \frac{1}{4}Q$$
$$P''' = \frac{1}{8}P \qquad Q''' = \frac{1}{8}Q$$
$$P'''' = \frac{1}{16}P \qquad Q'''' = \frac{1}{16}Q$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

so werden endlich die Theile so klein, daß man sich von der wahren Größe derselben kaum einen Begrif machen kann.

§. 270. Sollte es aber schlechterdings unmöglich sein, zwei Größen P und Q zu finden, durch welche sich A und B, C und D genau herausbringen ließen, man mag sie so groß oder so klein annehmen, und sie in eine so große Anzahl kleinerer Theile theilen als man will, mit einem Wort, wären die Größen A und B, C und D inkommensurabel, so wird man doch durch eine fortgesetzte Theilung, wenn sie auch nicht wirklich, sondern, wie in den meisten Fällen nur in Gedanken geschieht, doch auf so kleine Theile der Größen P und Q kommen, von deren Größe man sich kaum einen Begrif machen kann. Setzt man einen solchen Theil so oft zusammen, als es nöthig ist, so wird man die Größen B und D doch so genau herausbringen, daß der Fehler kleiner ist als ein solcher Theil, das will sagen, kleiner als eine Größe, die man sich denken kann, (Omni dabili minor) wie sich die alten Geometer ausdrückten. In diesem Falle kann man

also

also annehmen, daß die Größen B und D gerade durch einen solchen Theil der Größen P und Q herausgebracht werden. Ist alsdenn die Art, wie B und D aus diesen Theilen von P und Q entstehen, einerlei, so sind auch die vier Größen A, B, C, D proporzional, oder es ist

$$A : B = C : D,$$

wenn gleich A und B, C und D inkommensurabel sind.

§. 271. Die Lehre von den Proportionen ist unstreitig das Wichtigste sowohl in der Geometrie als in den mathematischen Wissenschaften überhaupt. Sie ist die Grundlage des ganzen mathematischen Kalkuls, und daher die Quelle aller Erfindungen, die sowohl in den alten als neuern Zeiten in der Mathematik gemacht worden sind. Alle Arten von Rechnungen, sie mögen in das militärische, in das Finanz-, Handlungs-, ökonomische, politische, oder in ein andres Fach schlagen, beruhen auf die Eigenschaften der Proporzionen. Die verschiedenen Rechnungsarten, die unter den Namen der Regel de Tri, de Quinque, de Septem, ꝛc. der Ketten- und Alligazionsrechnung bekannt sind, sind nichts als Anwendungen derselben auf besondere Fälle. Ein Geometer macht alles, ohne diese Namen zu wissen, so bald er nur die Verhältnisse weiß, die unter den Größen statt finden, die er mit einander vergleichen soll. Es ist daher höchst nothwendig sich mit den Eigenschaften der Proporzionen so lange zu beschäftigen,

bis man mit ihnen völlig bekannt ist, und keine Zeit ist nützlicher angewandt, als die, welche man darauf wendet. Aus dieser Ursach werde ich sie sorgfältig entwickeln und sie selbst bis auf alle Kleinigkeiten zergliedern.

Sechs und zwanzigste Stunde.

Fortsetzung.

§. 272.

Bei den Verhältnissen kommen eben die Grundsätze vor, welche bei den Größen selbst statt finden.

1) Gleiche Größen haben zu einerlei Größe einerlei Verhältniß. Wenn nemlich $A = B$ ist und man nimmt eine dritte Größe C, so ist auch

$$A : C = B : C.$$

Dies fällt gleich in die Augen, so bald man nur für B die Größe A setzt, denn alsdenn ist

$$A : C = A : C.$$

2)

2) Zwei Verhältnisse, die einer dritten gleich sind, sind einander gleich. Wenn nemlich

$$A : B = C : D$$
$$\text{und } E : F = C : D$$

so ist auch $A : B = E : F$.

Denn nach den Eigenschaften, die zur Gleichheit zweier Verhältnisse erfordert werden, muß (§. 267.)

$$A = mP, \quad C = mQ$$
$$B = nP, \quad D = nQ$$
$$E = mR, \quad F = nR \text{ sein}$$

Es ist also $A : B = mP : nP$
$E : F = mR : nR$.

Nun ist offenbar $mP : nP = mR : nR$.

Weil man nun gleiche Größen in die Stelle der andern setzen kann (§. 14. n. 1) so ist auch

$$A : B = E : F.$$

3) Wenn in einer Proporzion

$$A : B = C : D$$

das dritte Glied dem ersten gleich ist, nemlich $C = A$, so ist auch $D = B$ oder das vierte Glied dem zweiten gleich. (§. 267.)

4) Wenn in einer Proporzion

$$A : B = C : D$$

das zweite Glied dem ersten gleich ist $B = A$, so ist auch das vierte dem dritten gleich, oder $D = C$. Dies folgt ebenfalls aus §. 267.

§. 273. Wenn vier Größen proporzional sind, das ist, wenn

$$A : B = C : D$$

und man multiplizirt oder dividirt die ersten oder letzten beiden Glieder durch einerlei Zahl, sie mag eine ganze oder gebrochene Zahl sein, so wird dadurch die Proporzion nicht verändert, das will sagen, die dadurch entstehenden Größen haben eben die Verhältniß gegen einander, welche sie vorher gegen einander hatten. Es ist nemlich

1) $mA : mB = C : D$ oder $= A : B$.

2) $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = C : D$ oder $= A : B$.

3) $A : B = nC : nD$ oder $= C : D$.

4) $A : B = \frac{C}{n} : \frac{D}{n}$ oder $= C : D$.

5) $mA : mB = nC : nD$ oder $= A : B$.

6) $\frac{A}{m} : \frac{B}{m} = \frac{C}{n} : \frac{D}{n}$ oder $= A : B$.

Denn weil $A : B = C : D$, so müssen A und B aus einer gewissen Größe P eben so entstehen wie C und D aus einer gewissen Größe Q, die in allen Fällen bestimmt werden kann (§. 263.), oder es muß

$A = pP$; $B = qP$; $C = pQ$; $D = qQ$ sein (§. 267.) so daß

$$pP : qP = pQ : qQ$$

ist. Daher ist nach der Voraussetzung

1) $mpP : mqP = pQ : qQ$

2) $\frac{p}{m}P : \frac{q}{m}P = pQ : qQ$

3) $pP : qP = npQ : nqQ$

4) $pP : qP = \frac{p}{n}Q : \frac{q}{n}Q$

5) $mpP : mqP = npQ : nqQ$

6) $\frac{p}{m}P : \frac{q}{m}P = \frac{p}{n}Q : \frac{q}{n}Q$

Setzt man nun in n. 1 $mP = R$;

in n. 2. $\frac{P}{m} = R$

in n. 3. $nQ = T$

in n. 4. $\frac{Q}{n} = U$

in n. 5. $mP = X$; $nR = Y$

in n. 6. $\frac{P}{m} = W$; $\frac{Q}{n} = Z$

so erhalten wir

1) $pR : qR = pQ : qQ = C : D$ (nach der Voraussetzung.)

2) $pS : qS = pQ : qQ = C : D$ (nach der Voraussetzung)

3) $pP : qP = pT : qT = A : B$ (nach der Voraussetzung.)

4) $pP : qP = pU : qU = A : B$.
(nach der Voraussetzung.)

5) $pX : qX = pY : qY = A : B$
(nach n. 1.)

6) $pW : qW = pZ : qZ = A : B$
(nach n. 1.)

Lauter Verhältnisse die einander gleich sind. (§. 262.)

Z. B. wenn man die Proporzion hat.

$6 : 15 = 18 : 45$

so ist auch $4.6 : 4.15 = 18 : 45$

oder 1) $24 : 60 = 18 : 45$

$\frac{6}{3} : \frac{15}{3} = 18 : 45$

oder 2) $2 : 5 = 18 : 45$

$6 : 15 = 7.18 : 7.45$

oder 3) $6 : 15 = 126 : 315$

$6 : 15 = \frac{18}{9} : \frac{45}{9}$

oder 4) $6 : 15 = 2 : 5$

u. s. w.

§. 274. Wenn man in der Proporzion

$A : B = C : D$

die vorangehenden Glieder A und C, oder die nachfolgenden B und D durch eine gewisse Zahl, sie mag eine ganze oder gebrochene Zahl sein, oder die vorangehenden durch eine gewisse Zahl und die nachfolgenden durch eben dieselbe oder eine andere Zahl multiplizirt oder dividirt, so sind die dadurch entstehenden Größen wieder proporzional. Es ist nemlich:

1) $m A : B = m C : D$

2) $\frac{A}{m} : B = \frac{C}{m} : D$

3) $A : n A = C : n D$

4) $A : \frac{B}{n} = C : \frac{D}{n}$

5) $m A : n B = m C : n D$

6) $\frac{A}{m} : \frac{B}{n} = \frac{C}{m} : \frac{D}{n}$

Denn wenn $A = p P$ und $B = q P$ ist, so muß $C = p Q$ und $D = q Q$ sein, weil diese Größen proporzional sind. Setzt man nun diese Werthe in den hier auf einander folgenden Proporzionen, so findet man allezeit, daß das erste und zweite Glied aus der Größe P eben so entsteht wie das dritte und vierte Glied aus der Größe Q.

§. 275. Wenn A zu $B = C : D$, so ist auch:

1) $B : A = D : C$

2) $A + B : A = C + D : C$

3) $A + B : B = C + D : D$

4) $A : A + B = C : C + D$

5) $B : A + B = D : C + D$

6) $A - B : A = C - D : C$

7) $A - B : B = C - D : D$

8) $A : B - A = C : D - C$

9) $B : B - A = D : D - C$

10) $A + B : A - B = C + D : C - D$

11)

11) $A - B : A + B = C - D : C + D$
12) $A + B : B - A = C + D : D - C$
13) $B - A : A + B = D - C : C + C$:

Denn weil die Größen A, B, C, D proporzional sind, so entstehen die ersten beiden aus einer dritten Größe P, eben so wie die letzten beiden aus einer gewissen Größe Q (§. 262.) oder es ist

$$A = mP, \quad C = mQ$$
$$B = nP, \quad D = nQ$$

Daher ist auch

$$A + B = mP + nP = (m + n)P$$
$$C + D = mQ + nQ = (m + n)Q$$
$$A + B = P - nP = (m - n)P$$
$$C - D = mQ - nQ = (m - n)Q$$
$$B - A = nP - mP = (n - m)P$$
$$D - C = nQ - mQ = (n - m)Q$$

&c. (§. 14.)

Das will sagen, die Größen $B + A$, $A - B$ &c. enthalten die Größe P eben so oft als die Größen $C + D$, $C - D$ &c. die Größe Q oder die ersten entstehen eben so aus der Größe P als die letztern aus der Größe Q.

Es entstehn also bei allen diesen als wahr angenommenen Proporzionen das erste und zweite

Glied

Glied eben so aus der Größe P, wie das dritte und vierte aus der Größe Q; daher sind die darinn vorkommenden Größen auch wirklich proportionirt.

Z. B. wenn 2 : 5 = 8 : 20

so ist 1) 5 : 2 = 20 : 8

2) 7 : 2 = 28 : 8

3) 7 : 5 = 28 : 20

4) 2 : 7 = 8 : 28

5) 5 : 7 = 20 : 28

6) 2 : 3 = 8 : 12

7) 5 : 3 = 20 : 12

12) 7 : 3 = 28 : 12

13) 3 : 7 = 12 : 28

§. 276. Wenn daher in zwei Proportionen die vorangehenden Glieder einerlei oder das erste und dritte Glied gleich sind, nemlich wenn

$$A : B = C : D$$

und $A : E = C : F$

ist, so ist auch

1) $A : B + E = C : D + F$

2) oder $A : B - E = C : D - F$

Denn wegen der Proportion muß

$$A = m\,P, \quad C = m\,Q$$

$$B = n\,P, \quad D = n\,Q$$

$$E = p\,P, \quad F = p\,Q$$

sein. Das will sagen; eben so wie A, B und E aus einer Größe P entstehen, müssen auch C, D

D und F aus einer Größe Q entstehn. Daher ist

$$B + E = nP + pP = (n+p)P$$

$$D + F = nQ + pQ = (n+p)Q$$

folglich ist $A : A + E = mP : (n+p)P$

$$C : D + F = mQ : (n+p)Q$$

Nun ist $mP : (n+p)P = mQ : (n+p)Q$. §.

folglich auch $A : B + E = C : D + F$.

Eben so wird auch das zweite bewiesen.

§. 277. Eben dies findet statt, wenn die nachfolgenden Glieder einerlei oder das zweite und dritte Glied einander gleich sind. Nemlich wenn

$$A : B = C : D$$

und $E : B = F : D$,

so ist auch $A + E : B = C + F : D$.

oder $A - E : B = C - F : D$.

Dies wird leicht eben so bewiesen wie das vorige.

§. 278. Wenn man daher eine Reihe Proporzionen hat, wo das erste und dritte oder das zweite und vierte Glied einander gleich sind; so verhält sich auch das erste Glied zur Summe aller zweiten Glieder wie das dritte Glied zur Summe aller vierten Glieder.

Oder

Oder die Summe aller ersten Glieder verhält sich zum zweiten Gliede wie die Summe aller dritten Glieder zum vierten.

Nemlich wenn A:B = C:D
A:E = C:F
A:G = C:H
A:I = C:K
&c. &c.

so ist auch

A:B + E + G + I + &c. = C:D + F + H + K + &c.

und wenn A:B = C:D
E:B = F:D
G:B = F:D
I:B = K:D
&c. &c.

so ist auch

A + E + G + F &c. : B = C + F H + K + &c. : D.

Z. B. wenn 6:3 = 4:2
12:3 = 8:2
15:3 = 10:2
27:3 = 18:2
45:3 = 30:2,

so ist auch 6 + 12 + 15 + 27 + 45 : 3 = 4 + 8 + 10 + 18 + 30 : 2 oder wenn man die Zahlen wirklich zusammen rechnet 105 : 3 = 70 : 2.

Acht

Sieben und zwanzigste Stunde.

Fortsetzung.

§. 279.

Die bisher bewiesenen Eigenschaften der Proporzionen finden allemal statt, es mögen die ersten beiden Glieder mit den beiden letzten gleichartig sein oder nicht.

Wenn aber in der Proportion $A : B = C : D$ alle vier Glieder überdies von einerlei Art oder homogen sind, so verhält sich auch das erste Glied zum dritten wie das zweite zum vierten, oder es ist

$$A : C = B : D.$$

Dies fällt leicht in die Augen. Denn weil A und B aus einer dritten Größe P eben so entstehen wie C aus D aus einer dritten Größe Q, so ist

$$A = mP, \quad C = mQ$$
$$B = nP, \quad D = nQ$$

und daher $mP : nP = mQ : nQ$,

es mögen m und n ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

Nun ist offenbar $P : Q = P : Q$

folglich auch $mP : mQ = nP : nQ$

(§. 273. n. 6.)

oder $A : C = B : D$.

§. 280. Wenn in der Proporzion $A : B = C : D$ alle Glieder von einerlei Art sind,

so

so verhält sich auch die Summe oder Differenz des ersten und dritten Gliedes zur Summe oder Differenz des zweiten und vierten Gliedes wie das erste zum zweiten oder das dritte zum vierten, oder es ist

$$A + C : B + D = A : B$$
$$A - C : B - D = A : B.$$

Denn nach §. 279 folgt, daß

$$A : C = B : D$$

und also $A + C : A = B + D : B$
oder $A - C : A = B - D : B$ (§. 275 n. 3 und 6.)

Demnach ist wieder nach §. 279

$$A + C : B + D = A : B$$

oder $A - C : B - D = A : B$.

§. 281. Wenn daher eine Reihe Verhältnisse vorkömmt, die alle einer gewissen Verhältniß gleich sind, und die Größen sind alle von gleicher Art oder homogen, so verhält sich die Summe aller ersten zur Summe aller zweiten Glieder wie das erste zum zweiten oder das dritte zum vierten.

Wenn nemlich $A : B = A : B$
$C : D = A : B$
$E : F = A : B$
$G : H = A : B$
&c. &c.

so ist auch $A + C + E + G + \text{&c.} : B + D + F + H + \text{&c.} = A : B$ oder $= C : D$ &c.

Denn weil diese Verhältnisse alle einander gleich sind, so ist auch $A : B = C : D$, folglich §. 280 auch

$$A + C : B + D = A : B$$

folglich auch $A + C : B + D = E : F$. §. 272. n. 2.

Daher $A + C + E = B + D + F = E : F = A : B$ ꝛc.

§. 282. Aus eben dem Grunde ist auch

$$A - C + E - F : B - D + F - H = A : B,$$ wie leicht einzusehn.

Die Glieder müssen eben deswegen homogen sein, weil man ungleichartige Größen weder zusammensetzen noch von einander abziehen kann.

§. 283. **Wenn in einer Proporzion**

$$m : n = X : Z \text{ oder}$$
$$X : Z = m : n$$

die ersten beiden Glieder m und n Zahlen, die beiden letztern X und Z aber entweder auch Zahlen oder andere Größen von einerlei Art sind; so ist das Produkt aus den beiden äußern Glieder m und Z dem Produkte aus den beiden mittlern n und X gleich, oder es ist

$$m Z = n X$$

es mögen m, n ganze, gebrochene oder aus ganzen und gebrochenen Zahlen zusammengesetzte Zahlen sein.

Dies folgt leicht aus den Eigenschaften einer Proporzion; denn weil m aus der Einheit 1 so

ents-

entsteht wie es die Zahl m anzeigt, so muß auch X aus einer gewissen Größe P eben so entstehn wie m aus 1, das will sagen, es muß

$$X = m P$$

Eben so muß auch Z aus P eben so entstehn wie die Zahl n aus 1, §. 267, oder es muß

$$Z = n P$$

seyn. Setzt man diese Größen in die Proporzion anstatt der Größen X und Z, welches allezeit geschehen kann (§. 14. n. 1.)

so wird $m : n = mP : nP$

und hieraus sieht man mit bloßen Augen, daß

$$m . nP = n . mP$$

oder $mZ = nX$

§.

§. 284. Wenn daher nur drei Glieder in dieser Proporzion bekannt wären, so findet man das vierte Z, wenn man das Produkt aus den beiden mittelsten Gliedern durch das erste Glied m dividirt; und das mittelste Glied X, wenn man das Produkt aus den beiden äußern durch das zweite Glied n dividirt. Es ist nemlich

$$Z = \frac{nX}{m}$$

und $X = \frac{mZ}{n}$

§. 285. Es ist zum Beispiel

3 : 4 = 12 Quadratfuß : 16 Quadratfuß
folglich 3. 16 Quadratfuß = 4 : 12 Quadratfuß,
wie man leicht sieht.

Wenn $\frac{5}{8} : \frac{7}{12}$ = 15 Zentner : 14 Zentner
so ist $\frac{5 \cdot 96}{8}$ Zentner = $\frac{7 \cdot 15}{12}$ Zentner,
oder $\frac{70}{8}$ Zentner = $\frac{105}{12}$ Zentner.
Denn wenn man bei dem ersten Bruch Zähler und Nenner durch 2, bei dem zweiten Zähler und Nenner durch 3 dividirt, so bekömmt man $\frac{35}{4}$ Zentner = $\frac{35}{4}$ Zentner,
woran wohl niemand zweifeln wird.

Neun und zwanzigste Stunde.

Anwendung der Lehre von den Proporzionen auf einige militärische Rechnungen.

§. 286.

Die sogenannte Regel de Tri ist nichts weiter als die Anwendung des §. 283 und 284 bewie-

bewiesenen Satzes. Die Rechenmeister theilen sie ohne Noth in die gerade (directa) und umgekehrte (inversa) Regel de Tri ein. Die erste gebrauchen sie, wenn das vierte oder letzte, und die zweite, wenn das dritte oder mittelste Glied gesucht wird. Dem Geometer ist es einerlei, ob er das vierte oder dritte Glied suchen soll, weil ihm der §. 284 in jedem Falle zeigt, wie er sowohl das eine als das andere finden kann.

§. 287. Bei allen diesen Rechnungen muß man die Verhältniß derjenigen Größen wissen, die man mit einander vergleichen will. Bei Waaren, z. B. die nach einem gewissen Längen-Maaße, Flächen-Maaße, Gewichte oder körperlichen Maaße verkauft werden, verhalten sich die Preise allezeit wie die Waaren; das will sagen: wenn 1 Elle oder 1 Pfund, oder 1 Scheffel ꝛc. eine gewisse Summe Geldes kosten, so kosten 2 Ellen ꝛc. zweimal, 3 Ellen 3 mal ꝛc. $\frac{1}{2}$ Elle halb so viel, $\frac{1}{3}$ Elle $\frac{1}{3}$ so viel ꝛc. Oder überhaupt wenn so viel Ellen als die Zahl m anzeigt, mit n Thaler bezahlt werden, so kosten 2, 3, 4 ꝛc. mal so viel Ellen 2, 3, 4 ꝛc. mal n Thaler, und $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m ꝛc. Ellen $\frac{1}{2}$ n, $\frac{1}{3}$ n, $\frac{1}{4}$ n Thaler ꝛc.

Es muß dem Rechner ferner bekannt seyn, wie das Maas der Waaren und das Geld eingetheilt wird, damit er die nöthigen Veränderungen vornehmen, oder ein gewisses Maas in ein anderes verwandeln kann, das zwar mehrere Theile

enthält, aber dabei dem gegebenen doch vollkommen gleich ist.

Erstes Beispiel.

§. 288. Ein Capitain will Leinwand zu Hemden für seine Compagnie kaufen; das Schock soll 6 Thaler 6 Groschen kosten, wie hoch wird ihm die Elle zu stehen kommen?

Hier muß man wissen, daß 1 Schock 60 Ellen hält. Es ist also 1 Schock oder

60 Ellen; 1 Elle = 6 Thlr. 6 Gr.; Z

das vierte Glied ist der Preiß einer Elle.

Um die Rechnung fortzusetzen, verwandele man die Thaler in Groschen, so sind 6 Thlr. = 6. 24 = 144 Groschen; folglich ist

60; 1 = 150 Gr.; Z

und man findet $Z_{\frac{150}{60}}$ indem man die beiden mittlern Glieder mit einander multiplizirt und durch das erste dividirt,

nemlich $Z = \frac{150}{60}$ Gr. (§. 284.)

oder $Z = 2\frac{1}{2}$ Gr. = 2 Gr. 6 Pf.

§. 289. Der Capitain will bei diesem Preise 5 Ellen zu einem Hemde nehmen, wie viel wird das Hemde kosten?

Weil sich die Waaren-Maaße wie die Preise verhalten (§. 287) so ist

60; 5 = 6 Thlr. 6 Gr.; Z

oder wenn man das Geld in lauter Groschen verwandelt

$$60 : 5 = 140 : Z$$

also $Z = \frac{5 \cdot 140}{60}$ Gr. (§. 284.)

oder $Z = 12\frac{1}{2}$ Gr. $= 12$ Gr. 6 Pf.

§. 290. Gemeiniglich trägt man dergleichen Fragen so vor: Ein Schock oder 60 Ellen kosten 6 Thlr. 6 Gr. was kosten 5 Ellen? Dies ist im strengsten Verstande unrecht. Wenn man indeß nur darauf Acht hat, daß bei dieser Art der Bezeichnung der Proporzionen das vierte Glied allezeit mit dem zweiten von einerlei Art sein muß, so kann man es so hingehen lassen.

§. 291. Der Officier kommt im Felde oft in den Fall, daß er beim Empfange der Fourage ein in dem feindlichen Lande übliches Getraide-Maas in ein ihm bekanntes verwandeln muß. Z. B. den Dresdner oder Breslauer Scheffel in den Berliner, den böhmischen Strich in Berliner Metzen ꝛc. Dies ist leicht, wenn er die Verhältniß der Getraide-Maaße weiß.

Um aber die Verhältniß der Längen-, Flächen- und Körper-Maaße, Getraide-Maaße, Maaße flüßiger Dinge, der Maaße der Gewichte, kurz sie mögen Namen haben wie sie wollen, zu erfahren, muß man untersuchen, wie eine Größe von einer bestimmten Länge, Fläche, körperlichen Inhalte, Schwere ꝛc. durch die verschiedenen Maaße ausgedrückt wird. Gewöhnlich werden diese Größen gegeben, und man hat verschiedene Tabellen in denen diese Verhältnisse angezeigt werden. Eine davon haben wir in Beziehung auf Fußmaaße schon angegeben,

(§. 216.) Aus diesen nimmt man alsdenn die Verhältnisse, wenn man sie gebraucht. So weiß man, daß

31 Berliner Scheffel = 16 Dresdner Scheffeln,

11 Berliner Scheffel = 8 Breslauer oder schlesischen Scheffeln.

27 Berliner Scheffel = 16 böhmischen Strichen.

Jeder Scheffel oder Strich aber hält 16 Metzen.

§. 292. Nunmehr lassen sich folgende Fragen beantworten.

Drittes Beispiel.

Ein Officier soll 285 Rations Hafer empfangen, die Ration zu 3 Metzen Berliner Maas gerechnet. Diese erhält er in Dresdner Maas, wie viel Metzen wird er bekommen müssen.

Weil eine Razion 3 Berliner Metzen enthält, so muß er 855 Berliner Metzen erhalten. Man will also wissen, wie viel Dresdner Metzen 855 Berliner gleich sind. Erinnert man sich nun aus §. 272. n 4, daß wenn in einer Proporzion das zweite Glied dem ersten gleich ist, das vierte auch dem dritten gleich sein muß, so wird man so sagen können

$$31 \text{ Br.} : 16 \text{ Dr.} = 855 : Z$$

und alsdenn ist $Z = \frac{16 \cdot 855}{31} = \frac{13680}{31}$

oder $Z = 441\frac{5}{32}$ Dresdner Metzen.

2.) Wollte man dies in Breslauer Maaße wissen, so wären

$$11 \text{ B.} : 8 \text{ Br.} = 855 : Z$$

und $Z = 621\frac{9}{11}$ Breslauer Metzen.

3) In böhmischen Strichen oder Metzen

$$27 \text{ B.} : 16 \text{ Bö.} = 855 : Z$$

und $Z = 506\frac{2}{3}$ böhmischen Metzen.

§. 293. Die Verhältniß der in verschiedenen Ländern gangbaren Münzen erfährt man eben so. Man muß nemlich untersuchen, wie hoch eine gewisse bestimmte Größe an Gelde nach dem in jedem Lande gangbaren Gelde gerechnet wird. So weiß man z. B. daß nach dem Conventionsfuß in Sachsen die Mark fein Silber zu 19 Thlr. 8 Gr. oder $13\frac{1}{3}$ Thlr., in den preußischen Staaten aber zu 14 Thaler Courant gerechnet wird. Es sind also

14 Thlr. preußisch Courant $= 13\frac{1}{3}$ Thlr. sächsisch Courant.

Eben so ist es auch in Böhmen und Mähren, und in allen den Staaten, wo der Conventionsfuß von 1763 eingeführt worden. In Schlesien hingegen, wo man nach Thalern, Böhmen, Kreutzern, Gröschen und Hellern rechnet, sind 30 Böhm einem Thaler oder 24 Groschen preußischen

Courant gleich. 10 Böhmen machen 8 Groschen oder 5 Böhmen 4 Gr. preußisch Courant.

Das Geld aber wird in Sachsen eben so ausgemünzt wie in den preußischen Landen.

Viertes Beispiel.

§. 294. Ein Capitain muß 125 Thaler preußisch Courant in sächsisch Courant umsetzen, weil er verschiedene Bedürfnisse bezahlen will; es frägt sich also, wie viel dies in sächsischem Courant macht.

Nach der angegebenen Verhältniß ist also

14 Thlr. : 13 Thlr. 8 Gr. = 125 Thlr. : Z

oder 14 : 125 = 13 Thlr. 8 Gr. : Z (§. 279.)

Man verwandle 13 Thlr. 8 Gr. in Groschen, so wird

$$14 : 125 = 320 \text{ Gr.} : Z$$

folglich $Z = \frac{125 \cdot 320}{14}$ Groschen,

oder Z = 119 Thlr. $1\frac{1}{7}$ Gr. = 119 Thlr. 1 Gr. $1\frac{5}{7}$ Pf.

Fünftes Beispiel.

§. 295. Wie viel macht Ein schlesisches Böhm preußisch Courant?

Weil

Weil 1 Thaler 4 preußische Groschen machen (§. 293.)

so ist $1 : 4 = 1 : Z$

Macht man die vier Groschen zu Pfennigen, so ist

$1 : 48 \text{ Pf.} = 1 : Z,$

also $Z = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$

Sechstes Beispiel.

Wie viel rheinländische Fuß machen 6 Pariser oder eine Toise?

Nach der Tabelle (§. 216.) sind 1391 Pariser Fuß 1440 rheinländischen gleich. Demnach ist

$1391 : 1440 = 6 : Z$

folglich $Z = \frac{1440 \cdot 6}{1391} = 6\frac{297}{1391}$ rheinl. Fuß.

In dergleichen Fällen verwandelt man gern die Fuße in Linien und schreibt 864 Linien statt 6 Fuß, weil der Fuß in 12 Zolle und der Zoll in 12 Linien, folglich der Fuß in 144 Linien eingetheilt wird. Alsdenn ist

$1391 : 1440 = 864 : Z$

$Z = \frac{1440 \cdot 864}{1391}$ rheinl. Linien $= 894\frac{606}{1391}$ Linien,

oder $Z = 6$ Fuß, 2 Zoll $6\frac{606}{1391}$ Linien.

Beispiel

Dreißigste Stunde.

Proporzional-Linien.

§. 296.

Fig. 129. Wenn zwei willkührlich gezogene gerade Linien AB, CD von zweien andern EF, GH, die mit einander parallel sind, in I, L, K, M durchschnitten werden, und man theilt den Theil von AB oder CD, der zwischen den Parallel-Linien enthalten, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, zieht hernach durch die Theilungspunkte mit den Parallel-Linien EF, GH andere Linien parallel; so wird durch diese der Theil der andern Linie, der zwischen den Linien EF, GH eingeschlossen ist, in eben so viel gleiche Theile getheilt.

Man theile IL in den Punkten N, O, P, Q, R ꝛc. in gleiche Theile (§. 112.) so daß IN = NO = OP ꝛc. und ziehe Nn, On, Pp ꝛc. parallel mit EF oder GH, welche die KM in n, o ꝛc. durchschneiden, so wird Kn = no = op = pq = qr = rM sein.

Um dies zu beweisen, ziehe man durch die Punkte K, n ꝛc. die Linien Kn', no', op' ꝛc. parallel mit AB, so ist Kn' = IN; no' = NO; op' = OP ꝛc. (§. 113.) folglich ist Kn' = no' = op' ꝛc.

In den Dreiecken Kn'n; no'o, op'p ꝛc. sind aber auch die Winkel nKn'; ono'; pop' ꝛc.

ferner die Winkel kmn′; noo′; opp′ ꝛc. einander gleich (§. 105. n. 2) folglich die Dreiecke selbst (§. 59.) Demnach ist auch kn = no = op = pq ꝛc.

§. 297. Wenn zwei nach Gefallen gezogene gerade Linien MN, GP von dreien Linien, die mit einander parallel sind, in den Punkten A, B, C, D, E, F durchschnitten werden, so sind die Theile, welche zwischen einerlei Parallel-Linien liegen, proporzional. Es ist nemlich Fig. 160.

$$AC : AB = DF : DE.$$

Man theile AC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, die man so groß annehmen kann als man will, (§. 114.) und ziehe in Gedanken durch alle Theilungspunkte gerade Linien mit AD parallel, so wird DF in eben so viel gleiche Theile getheilt. (§. 296.) Ist nun P ein solcher Theil von AC, und Q ein Theil von DF, so entstehn AC und DF auf einerlei Art aus P und Q, so daß, wenn die Anzahl der Theile in AC, und folglich auch in DF m ist, AC = m P und DF = m Q ist.

Geht nun 1) die Linie BE durch einen von den Theilungspunkten, so enthält AB den Theil P so vielmal als DE den Theil Q, (§. 295.) oder wenn n die Anzahl der Theile ist, so ist AB = n P und DE = n Q. Weil nun m P : n P = m Q : n Q, so ist offenbar nach §. 14. n. 1.

$$AC : AB = DF : DE.$$

2) Geht die Linie BE nicht durch einen der Theilungspunkte, so theile man AC in eine andere Anzahl gleicher Theile, bis dies zutrift, und wenn dies nicht ganz genau möglich seyn sollte, in eine so große Anzahl gleicher Theile, daß der Fehler, der dadurch entsteht, wenn BE nicht genau durch einen Theilungspunkt geht, kleiner ist als eine jede Größe, die man denken kann, (§. 169.) so wird doch allezeit $AC = mP$; $DF = mQ$; $AB = nP$ und $DE = nQ$ und folglich

$$AC : AB = DF : DE$$

sein, wie klein auch die Theile P genommen werden (§. 296.)

§. 298. Wenn man hier das anwendet, was §. 275 gezeigt worden, so ist auch

1) $AB : AC = DE : DF$

2) $AC - AB : AB = DF - DE : DE$

oder $BC : AB = EF : DE$

3) $AC : AC - AB = DF : DF - DE$

oder $AC : BC = DF : EF$.

endlich auch umgekehrt,

4) $AB : BC = DE : EF$

5) BC : AC = EF : DF.

und weil hier alle Größen von gleicher Art sind, auch nach §. 279.

AC : DF = AB : DE

AB : DE = BC : EF.

Auf diese Art kann man mehrere Veränderungen machen, wenn man nach der Vorschrift des §. 275 und 279 verfähret.

§. 299. Wenn man in einem Dreiecke ABC mit einer Seite BC eine gerade Linie DE, wo man will, parallel zieht; so schneidet sie die beiden andern Seiten in D und E proporzional.

Denn wenn man durch den Punkt A eine Linie FG mit DE parallel zieht, so liegen die Linien AB, AC, AD, AE zwischen einerlei Parallelen; folglich ist (§. 297) Fig. 161.

AB : AD = AC : AE.

§. 300. Eben dies findet auch statt, wenn man die Seiten AB, AC auf welcher Seite man will verlängert. Es ist allezeit Fig. 160. 163.

AB : AD = AC : AE

oder AB : AC = AD : AE

§.

§. 301. Auch ist bei eben dieser Voraussetzung AB : BC = AD : DE, oder AE : DE = AC : BC.

Fig. 164. 165. 166. Man sieht dies leicht, wenn man nur durch E die Linie EF mit AB parallel zieht. Denn in diesem Fall ist überall

AE : AC = BF : BC. (§. 297 und 298.)

Weil aber DE, BC und AB, EF parallel sind, so ist BF = DE. §. 113, folglich §. 14. n. 1.

AE : AC = DE : BC

oder AE : DE = AC : BC,

und weil AE : AC = AD : AB §. 299

DE : BC = AD : AB.

oder AB : BC = AD : DE (§. 175.)

§. 302. Wenn die Linie DE die Seiten AB, AC eines Dreiecks ABC porporzional oder so schneidet, daß

Fig. 167. AD : AB = AE : AC

so ist sie mit der Seite BC parallel.

Wäre dieses nicht, so ziehe man DF mit BC parallel, so wäre AD : AB = AF : AC (§. 299.)

Denn

Demnach AF : AC = AE : AC. (§. 272. n. 2)
folglich AF : AE = AC : AC. (§. 279)
Das will sagen, AF = AE: (§. 272. n. 4)
das kleinere dem größern, welches unmöglich ist.
Demnach sind BC, DE parallel.

Dies findet auch bei den Figuren 162, 163 statt.

§. 303. Wenn die Frage entsteht:

Zu drei gegebenen geraden Linien A, B, C die vierte Proporzional-Linie zu finden:

so läßt sich diese auf verschiedene Art beantworten. Fig. 161a 162. 163.

Man ziehe z. B. zwei gerade Linien AB, AC, so daß sie sich in A durchschneiden.

Auf einer von ihnen nehme man von dem Durchschnittspunkte A an gerechnet AB = A, AD = B, auf der andern AC = C, ziehe BC und durch D die Linie DE mit BC parallel, so daß sie AC in E durchschneidet, so ist AE die verlangte Linie. Denn es verhält sich

AB : AD = AC : AE. §. 299.

oder A : B = C : AE. §. 14. n. 1.

folglich ist AE die vierte Proporzional-Linie.

§. 304. Wenn die Linie B der Linie C gleich ist, oder wenn man zu den Linien A, B, B die vierte Proporzional-Linie finden soll, so sagt man auch, zu zwei geraden Linien die dritte Proporzional-Linien zu finden. Bei der Auflö-

sung dieser Aufgabe ist daher nichts weiter nöthig, als AC = AD = B zu machen.

§. 305. Wenn man eine gerade Linie AC in eben der Verhältniß theilen soll, in der eine andere AB in D getheilt ist; so setze man
Fig. 161. AC an AB unter einem willkührlichen Winkel, ziehe die äußersten Punkte B und C zusammen, und durch D eine Linie mit BC parallel, welche AC in E durchschneidet, so geschieht dem Verlangen ein Genüge.

Denn weil BC, DE parallel gezogen worden, so ist AD: AB = AE: AC (§. 299.)

§. 306. Auf diese Art kann man eine jede gerade Linie in so viel gleiche Theile theilen, als man will, wie wir schon (§. 114) gesehen haben.

Ein und dreißigste Stunde.

Aehnlichkeit der Figuren.

§. 307.

Bei den Werken der Mahler und Bildhauer ist die Aehnlichkeit mit den Gegenständen, welche sie vor

vorstellen sollen, das gröſste Verdienst des Meisters. Ein jedes Auge, es mag geübt oder nicht geübt seyn, entscheidet sogleich, ob ein Gemählde ähnlich ist oder nicht. Und wenn die Urtheile zweier Personen darin verschieden sind, so liegt gröſstentheils eine verdeckte Absicht dabei zum Grunde, entweder dem Mahler, oder dem, der sich mahlen lassen, ein Kompliment zu machen. Das Gefühl der Aehnlichkeit ist allgemein und bringt die angenehmsten und oft die drolligsten Täuschungen hervor.

Es ist, wenn ich mich so ausdrücken soll, eine von der Natur dem Menschen mitgegebene Kraft, das Verhältniß aller Theile eines Gemähldes, einer Statue ꝛc. zu den gleichnamigen Theilen des Originals zu empfinden, und wir werden keinen Anstand nehmen, eine Copie ähnlich zu nennen, wenn wir finden, daß die verschiedenen Theile derselben nicht allein eben die Lage wie in dem Originale, sondern die Entfernungen derselben von einander auch eben dieselbe Verhältniß gegen einander haben wie in dem Originale. Bei diesem Begriffe bleibt auch der Geometer und nennt

Ebene geradelinigte Figuren **ähnlich**, wenn alle in einer gewissen Ordnung auf einander folgende Winkel der einen, allen in eben der Ordnung auf einander folgenden Winkeln der andern **gleich**, die Seiten aber, welche zwischen diesen gleichen Winkel liegen

oder gleiche Winkel einschließen, **proportzional** sind.

Wenn z. B. in den beiden Vierecken ABCD, Fig. 168. abcd die Winkel ABC = abc; BCD = bcd; CDA = cda; DAB = dab sind, und dabei

$$AB : ab = BC : bc$$
$$AB : ab = AD : ad$$
$$BC : bc = CD : cd$$

ist, und so weiter; so sind diese Vierecke einander ähnlich. Denn wirklich ist in beiden die Lage der Seiten einerlei, und wenn man beide in einer gewissen Entfernung betrachtete, so würden sie gleich groß zu sein scheinen.

§. 308. Weil in ähnlichen Figuren sich zwei Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, wie jede, zwei andere verhalten, die in beiden auf gleiche Art liegen, (latera homologa) nemlich weil AB: ab = BC: bc = CD: cd = Da: da, so verhält sich auch die Summe einer gewissen Anzahl auf einander folgender Seiten der einen Figur zu der Summe einer gleichen Anzahl auf einander folgenden und zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten der andern Figur, und überhaupt der Umkreis der einen Figur zum Umkreise der andern eben so wie eine Seite in der ersten Figur zu einer zwischen gleichen Winkeln liegenden Seite der andern Figur.

Denn

Denn weil AB : ab = AB : ab
BC : bc = AB : ab
CD : cd = AB : ab
DA : da = AB : ab

so ist auch AB + BC : ab + bc = AB : ab = BC : bc ꝛc. und AB + BC + CD + DA : ab + bc + cd + da = AB : ab. §. 280.

§ 309. **Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel CAB, ABC zweien Winkeln eines andern Dreiecks gleich sind, nemlich CAB = cab, ABC = abc, so sind die Dreiecke einander ähnlich.** Fig. 169.

Man verlängere die Seite AB, lege in Gedanken das Dreieck abc an das Dreieck ABC dergestalt, daß der Punkt a auf B, und die Seite ab auf die Verlängerung der Linie AB falle, und verlängere auch die Seiten bc, AC, bis sie sich in D durchschneiden. Fig. 170.

Weil die Winkel CAB, cab einander gleich sind, so sind die Linien AC oder AD und ac parallel; und weil auch der Winkel ABC dem Winkel abc gleich ist, so sind auch die Linien BC und bc oder bD parallel. (§. 106) Daher ist BC = cD, und Bc oder ac = CD (§. 113.) Wir haben also nach §. 298, 299.

AB : Bb = AC : CD

$$AB : Bb = cD : bc$$

oder $$AB : ab = AC : ac$$

$$AB : ab = BC : bc$$

folglich auch $AC : ac = BC : bc$

das will sagen:

Die Linien, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, sind proporzional; demnach die Dreiecke ABC, abc einander ähnlich, §. 307.

§. 310. Wenn in zweien Dreiecken die Winkel BAC, bac gleich, und die Seiten, welche sie einschließen, proporzional sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Fig. 171.

Man nehme $AD = ab$, $AE = ac$ und ziehe DE: so sind die Dreiecke ADE, abc einander gleich, (§. 48) $ADE = abc$, $AED = acb$, $DE = bc$.

Weil nun nach der Voraussetzung

$$AB : ab = AC : ac$$

oder wenn man Gleiches für Gleiches setzt, §. 14. n. 1

$$AB : AD = AC : AE$$

so ist DE mit BC parallel (§. 302)

Demnach der Winkel $ADE = ABC$; $AED = ACB$. §. 105. Das will sagen

der

Der Winkel abc = ABC; acb = ACB.

Daher sind die Dreiecke ABC, abc ähnlich, folglich die übrigen Seiten ebenfalls proporzional. (§. 307.)

§. 311. Wenn die Seiten eines Dreiecks ABC den Seiten eines andern abc proporzional sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich. Fig. 171.

Man nehme AD = ab; AE = AC und ziehe DE.

Weil nun nach der Voraussetzung AB: ab = AC: ac, so ist auch AB : AD = AC: AE, folglich DE mit BC parallel (§. 302) der Winkel ADE = ABC; AED = ACB (§. 105) und die Dreiecke ADE, ABC ähnlich. §. 307. Es ist daher auch (§. 309.)

$$AB : AD = BC : DE$$

oder, weil AD = ab genommen worden,

$$AB : ab = BC : DE$$

Nach der Voraussetzung ist aber auch

$$AB : ab = BC : bc$$

Demnach ist BC: bc = BC; DE (§. 272. n. 2)

und bc = DE (ebend. n. 3.)

Die Dreiecke ADE, abc sind also einander gleich, und es ist der Winkel ADE = abc;

BAC = bac, AED = acb, (§. 74). Weil aber nach dem, was bewiesen worden, ADE = ABC, AED = ACB, so ist auch der Winkel ABC = abc; ACB = acb. Folglich sind die Dreiecke abc, ABC ähnlich. (§. 309.)

§. 312. Wenn in zweien rechtwinklichen Dreiecken ABC, abc die Seiten, welche einen von den spitzen Winkeln einschließen, proportzional sind; so sind die Dreiecke einander ähnlich. Fig. 172.

Wenn die Seiten AC, AB, ac, ab, welche die Winkel BAC, bac einschließen, proportzional sind, oder

$$AB : ab = AC : ac$$

ist; so mache man AD = ab und ziehe DE mit BC parallel, so ist AB : AD = AC : AE oder

$$AB : ab = AC : AE,$$

folglich AC : AE = AC : ac (§. 272. n. 2)

Demnach AE = ac §. 272. n. 3)

In den beiden bei D und b rechtwinklichen Dreiecken ADE, abc sind demnach die Seiten, welche einen von den spitzen Winkeln einschließen, einander gleich; folglich sind die Dreiecke einander selbst gleich, oder können einander decken (§. 61.)

Das Dreieck ADE ist aber dem Dreiecke ABC ähnlich, weil beide den Winkel A gemeinschaftlich haben

haben, und AB : AD = AC : AE ist (§. 310) Demnach ist auch das Dreieck abc dem Dreiecke ABC ähnlich.

§. 313. Wenn man in einem rechtwinklichen Dreiecke ABC von der Spitze des rechten Winkels C auf die gegenüberliegende Seite AB die Linie CD perpendikulär zieht, so theilt sie das Dreieck ABC in zwei andere ACD, BCD, die sowohl einander selbst als dem ganzen ABC ähnlich sind. Fig. 173.

Denn die rechtwinklichen Dreiecke ABC, ADC haben den Winkel BAC gemeinschaftlich. Nun ist

BAC + ABC = R

BAC + ACD = R §. 98

folglich ABC = ACD. §. 14. n. 1.

Ferner ist DBC oder ABC + BCD = R.

ABC + BAC = R.

folglich BCD = BAC.

Demnach die Winkel in den Dreiecken ABC, ADC, BCD, welche in einerlei Ordnung auf einander folgen, einander gleich, folglich diese Dreiecke einander ähnlich. (§. 309.)

§. 314. Die in einem rechtwinklichen Dreiecke von der Spitze des rechten Winkels auf die gegen-

über liegende Seite gezogene Perpendikularlinie CD ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen den auf der Seite AB dadurch entstandenen Abschnitten AD, DB.

Denn weil die Dreiecke ADC, DBC ähnlich sind, so ist AD : DC = DC : DB. §. 307.

§. 315. Aehnliche geradelinigte Figuren ABCDEFGH, abcdefgh lassen sich in gleich viel ähnliche Dreiecke zertheilen.

Die Winkel, welche mit gleichen Buchstaben in beiden Figuren bezeichnet sind, werden hier
Fig. gleich angenommen. Nimmt man nun die Win-
274 kel A, a und zieht die Linien BH, bh, so sind die Dreiecke ABH, abh einander ähnlich, weil die Winkel BAH, bah gleich, und AB : ab = AH : ah (§. 307. 310) Es ist also auch der Winkel AHB, = ahb, ABH = abh, und AH : ah = BH : bh. (§. 310.) Weil nun auch AH : ah = HG : hg. (§. 307) so ist auch HG : hg = BH : bh. Weil ferner wegen der Aehnlichkeit der Figuren die Winkel AHG, ahg, und, wie erwiesen worden, die Winkel AHB, ahb gleich sind, so ist auch

$$AHG - AHB = ahg - ahb,$$

oder $$BHG = bhg.$$

Demnach auch die beiden Dreiecke BHG, bhg ähnlich, §. 310. Folglich

HG

HG : hg = BG : bg = BC : bc. §. 307.

HBG = hbg

und weil ABH = abh,

so ist ABH + HBG = abh + hbg. §. 14. n. 1. oder die Winkel ABG, abg sind einander gleich.

Nun sind aber auch die Winkel ABC, abc einander gleich, folglich ist ABC — ABG = abc — abg

oder GBH = gbh

Demnach auch die Dreiecke BGC, bgc ähnlich. (§. 310.) Eben so läßt sich auch die Aehnlichkeit der übrigen Dreiecke erweisen.

§. 316. Wenn man innerhalb zweier ähnlichen Figuren ABCDE, abcde zwei Punkte P, p nimmt, welche so beschaffen sind, daß wenn man nach den Spitzen zweier Winkel A, B in der einen, die Linien PA, PB, und nach den Spitzen zweier Winkel a, b, die in der zweiten den vorigen gleich sind und auf gleiche Art liegen, die Linie pa, pb zieht, die Dreiecke ABP, abp, welche dadurch entstehn, einander ähnlich sind, und man zieht hernach von diesen Punkten P, p nach den Spitzen der übrigen Winkel die Linien PC, PD, PE, pc, pd, pe ꝛc. so werden dadurch die Figuren in ähnliche Dreiecke getheilt. Fig. 175.

Weil

Weil nach der Voraussetzung die Dreiecke ABP, abp ähnlich sind, so sind die Winkel, die in denselben auf einerlei Art liegen, gleich, und die Seiten proporzional. Es ist nemlich ABP = abp, BAP = bap und AB : ab = PB : pb. (§. 307.)

Weil aber die Figuren selbst ähnlich sind, so sind die Winkel ABC = abc, BCD = bcd ꝛc. und AB : ab = BC : bc ꝛc. §. 307.

Die Dreiecke BCP, bcp sind daher auch einander ähnlich, weil ABC — ABP = abc — abp, oder die Winkel PBC, pbc gleich, und PB : pb = AB : ab, wie erwiesen worden, das will sagen, PB : pb = BC : bc ist. (§. 310.) Eben so kann der Beweis von den übrigen Dreiecken geführt werden.

§. 317. Wenn zwei Rectangel oder Rechtecke ABCD, abcd einander ähnlich sind, und man theilt die Seiten AB, ab in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, und die Seiten AB, ac in eben dieselbe oder in eine andere Anzahl gleicher Theile, zieht hernach durch die Theilungspunkte gerade Linien mit AB, ab, AC, ac parallel, so sind alle dadurch entstehende Rechtecke sowohl einander selbst als den Rectangeln ABCD, abcd ähnlich.

Fig. 376.

Daß auf diese Art lauter Rechtecke entstehen, ist für sich klar. Wenn aber AB, ab in so viel gleiche Theile getheilt worden, als die Zahl m, z. B. 4, Einheiten hat, und AC, ac in so viel

gleiche

gliche Theile als die Zahl n, z. B. 5, Einheiten hat, so ist $AB : ab = \frac{1}{m} AB : \frac{1}{n} ab$

$$AC : ac = \frac{1}{n} AC : \frac{1}{n} ac$$

Folglich da wegen der Aehnlichkeit §. 307

$$AB : ab = AC : ac$$

so ist auch $\frac{1}{m} AB : \frac{1}{m} ab = \frac{1}{n} AC : \frac{1}{n} ac$

Es sind aber $\frac{1}{m} AB$, $\frac{1}{m} ab$ die Seiten der durch die Theilung entstandenen Rectangel, welche mit AB, ab parallel sind, und $\frac{1}{n} AC$, $\frac{1}{n} ac$, die Seiten, welche mit AC, ac parallel sind.

Folglich sind die um gleichen Winkeln liegende Seiten proporzional und diese Rectangel einander und dem ganzen Rectangel ähnlich. §. 307.

Zwei und dreißigste Stunde.

Das Kopieren und Verjüngen der Figuren.

§. 311.

Diese Eigenschaften der Aehnlichkeit geradelinigter Figuren erweitert den Wirkungskreis der Geometrie fast ins Unendliche. Die Bestimmung der Entfernung verschiedener Gegenstände von einander, wenn wir auch oft nicht gerade zu oder gar nicht zu ihnen kommen können, die Höhe der Berge, die wir in der Ferne sehen; das sogenannte Aufnehmen einer Gegend, einer Provinz, eines ganzen Landes, und tausend andere Unternehmungen von der größten Wichtigkeit, die ich hier nicht der Reihe nach herzählen kann, hängen von diesen Grundsätzen ab. Denn eine Gegend Aufnehmen heißt nichts anders als eine Figur bestimmen, welche dieser Gegend vollkommen ähnlich ist; und je größer diese Aehnlichkeit ist, desto richtiger und genauer ist die Vermessung. Das sogenannte Verjüngen gegebener Figuren, Charten ꝛc. ist ebenfalls nichts anders als die Verfertigung anderer Figuren, anderer Charten, welche den gegebenen ähnlich sind. Und man versteht unter einem verjüngten Maasstaabe einen solchen, der nach einer gewissen verlangten oder gegebenen

denn Verhältniß kleiner ist als ein anderer, und dient alle Linien einer gegebenen Figur in eben der Verhältniß zu verkleinern.

Ich werde von dem Aufnehmen einer Gegend einige Stunden besonders handeln und gegenwärtig nur das vornehmen, was bei dem sogenannten Verjüngen, das man auch öfters Kopieren nennt, beobachtet werden muß.

§. 319. Es wird eine geradelinigte Figur ABCDE ꝛc. gegeben; man soll eine andere abcde ꝛc. machen, welche derselben ähnlich ist. Fig. 174.

Dies kann nach dem Vorhergehenden auf mancherlei Arten geschehen, die aber doch auf Folgendem beruhn. Man theile nemlich die gegebene Figur in Dreiecke ABH, BGH, BCG ꝛc. und nehme alsdenn nach Gefallen eine gewisse Linie ab so an, daß die Verhältniß der Linie AB zu ab einer gegebenen Verhältniß gleich ist.

Hierauf beschreibe man bei a den Winkel bah = BAH, bei b den Winkel abh = ABH, so ist das Dreieck abh dem Dreiecke ABH ähnlich. §. 310.

Man nehme ferner den Winkel bhg = BHG hbg = HBG, so ist auch das Dreieck bhg dem Dreiecke BHG ähnlich. §. 310.

Auf diese Art fahre man fort, so wird die Figur abcde ꝛc. der gegebenen Figur ABCDE ꝛc. vollkommen ähnlich werden. §. 315.

Oder man suche zu den Linien AB, ab und AH, HB, HG, BG, BC, GC ꝛc. die vierten Proportionallinien ah, hb, hg, bg, bc, gc ꝛc. (§. 303.) und beschreibe mit denselben über ab das Dreieck abh, über BH das Dreieck bhg, über bg das Dreieck bcg u. s. w. so wird die Figur entstehn, welche der gegebnen ähnlich ist; weil sie aus lauter Dreiecken zusammengesetzt ist, welche denen ähnlich sind, in welche die gegebene Figur getheilt worden.

§. 320. Dies Verfahren würde in manchen Fällen aber doch viel Weitläuftigkeiten und Unbequemlichkeiten verursachen; man braucht daher lieber die Art, welche sich auf den §. 317. gründet.

Man beschreibt nemlich um die Figur, welche man kopieren oder verjüngen will, ein Viereck, und theilt jede Seite desselben in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, zieht durch die Theilungspunkte gerade Linien, damit man eine gewisse Anzahl Rectangel oder Quadrate bekomme; beschreibt hierauf ein anderes Viereck, dessen Seite zu dem gegebenen eine gewisse Verhältniß hat, theilt jede Seite desselben in eben so viel gleiche Theile, damit man eben so viel Rectangel oder Quadrate bekomme als in dem gegebenen. Nimmt man alsdenn nach und nach jedes Rectangel in der ersten und trägt die darin befindliche kleine Figur in den ihm entsprechenden Rectangel der zweiten nach §. 319. so wird man seine Absicht erreichen.

§. 321.

3. B.

§. 321. Wenn man die Charte 177, oder einen Theil einer Charte kopieren, oder wie Figur 178 verjüngen soll:

so theile man die horizontale Seite MP der ersten in 6, die gerade herunterlaufende Seite MN, welche auf der horizontalen perpendikulär ist, in 5 gleiche Theile, und ziehe die Theilungspunkte durch Linien zusammen, so bekommt man in allen 30 kleinere Rectangel.

Nachdem nun jede Seite der zu zeichnenden Charte der vorigen gleich, oder die Hälfte, der dritte Theil ꝛc. sein soll, nehme man Fig. 178 mp = MP, oder mp = ½ MP, ꝛc. mn = MN, oder mn = ½ MN, ꝛc. theile mp in 6 und mn in 5 gleiche Theile, und ziehe ebenfalls gerade Linien durch die Theilungspunkte, damit man ebenfalls 30 kleinere Rectangel bekomme.

So ist §. 317 sowohl das kleinere Rectangel oder die kleinere Charte mnop der größern MNOP, als auch in dem ersten jedes kleinere Rectangel einem jeden Rectangel in dem letztern ähnlich.

Wenn dies geschehen ist, so nehme man in jedem Rectangel, Fig. 177, zuerst die Hauptpunkte vor und trage sie in den ihm entsprechenden Rectangel der zweiten Figur, und hernach gehe man zu den übrigen fort, nemlich zu den Flüssen, Bächen, Höhen, Wäldern ꝛc.

Weil nun die 178ste Figur der 177sten ähnlich sein soll, so muß die Entfernung eines jeden Punktes in dem Rectangel der ersten Figur von den Ecken desselben zu der Entfernung eben dieses Punkts von den Ecken des Rectangels, in dem er in der zweiten Figur liegen soll, eben die Verhältniß haben, welche eine Seite der ersten Figur zu der ihr entsprechenden Seite der zweiten Figur hat.

Will man also das Dorf C in dem 6ten Rectangel der 177sten Figur oben rechter Hand in das 6te Quadrat der untern Figur 178 tragen, so suche man zu AB, AC und ab die vierte Proportional-Linie ac, ferner zu AB, BC und ab die vierte Proporzional-Linien bc, beschreibe alsdenn mit BC, bc über ab Fig. 178 ein Dreieck, so wird der Punkt c in der untern Figur eben so liegen wie in der obern. (§. 317.)

Geschieht dies nun mit allen Punkten, so wird die untere Figur der obern vollkommen gleich oder ähnlich, und zugleich verjüngt sein, wie man zu sagen pflegt.

§. 321. Um auch nicht nöthig zu haben, für jede Linie die vierte Proporzional-Linie zu suchen; so bedient man sich des verjüngten Maasstaabes; das will sagen, man macht zu der zu zeichnenden Figur einen Maasstaab, der entweder dem gegebnen und zu der zu kopierenden oder zu verjüngenden Figur gehörigen gleich, oder die Hälfte, der dritte, vierte ꝛc. Theil desselben ist. Alsdenn

nimmt

nimmt man auf dem ersten die Entfernung der Punkte A und C, B und C, und auf dem zweiten eben die Entfernung der Punkte a und c, b und c, und verfähret im übrigen so wie §. 230 gezeigt worden.

§. 322. Wenn die Linien, welche bei Maasstäben die Länge einer Meile, einer Ruthe, eines Fußes, eines Zolles ꝛc. ausdrücken, nicht sehr groß sind, so lassen sich die kleinern Theile beim Zeichnen nicht allzuwohl ausdrücken. Weil man aber doch öfters nöthig hat, Linien zu ziehen, die einige Ruthen und Fuß, oder einige Fuß und Zoll ausdrücken: so entsteht die Frage, wie man dies bewerkstelligen könne, ohne die Linie, die z. B. einen Fuß bedeutet, selbst zu theilen. Man nennt dies einen Maasstab, oft auch einen verjüngten Maasstaab, verfertigen. Gesetzt also

Man sollte einen Maasstaab oder verjüngten Maasstaab verfertigen und eintheilen,

so bestimme man zuerst, welches die Abtheilungen und Unterabtheilungen des Maaßes sein sollen, ob die zwölf- oder zehntheilige Eintheilung gebraucht werden soll.

Hierauf ziehe man eine gerade Linie MN und nehme darauf von einem gegebenen oder willkührlichen Punkt A gerechnet, die eigentliche Größe oder Länge AB der Linie, die man nach Beschaffenheit der Zeichnung zu der größten Einheit erwählt; z. B. eine Meile, eine Ruthe ꝛc. oder Fig. 179.

wenn man 10, 20 ꝛc. Ruthen zu einer Einheit nimmt, die Länge von 10, 20 ꝛc. Ruthen.

Diese Einheit AB theile man in so viel Theile, in so viel sie nach dem allgemeinen Gebrauch getheilt wird, oder als man seiner Absicht gemäß findet. Z. B. wenn AB eine Ruthe sein und die zehntheilige Eintheilung gewählt wird, in 10 gleiche Theile, wo jeder also ein Fuß ist, und trage diese auf der Linie AB, von B bis C ꝛc. fort. Schreibe auch des bequemern Zählens wegen neben die Theilungspunkte die nöthigen Zahlen.

Um nun auch die Fuße in Zolle zu theilen, ziehe man durch den Punct A eine Linie AE auf MN perpendikulär, oder auch unter einem andern Winkel, und theile sie ebenfalls in 10 gleiche Theile.

Durch E ziehe man EH mit MN parallel, (§. 109) nehme darauf EF = AB, FG = AB, GH = AB ꝛc. theile EF eben so wie AB in 10 gleiche Theile und schreibe neben die Theilungspunkte die dazu gehörige Zahlen.

Hierauf ziehe man durch die Punkte C, G, D, H ꝛc. und durch die mit gleichen Zahlen bezeichneten Theilungspunkte auf den Linien AB, EF gerade Linien, ferner von B nach 1 auf EF, von 1 auf AB nach 2 auf EF ꝛc. und endlich durch alle Theilungspunkte auf der Linie AE gerade Linien mit MN oder EF parallel; so ist der **Maasstaab** fertig; das will sagen, man kann dadurch Linien bestimmen, die eine gewisse Anzahl Ruthen, Fuß und Zolle lang sein sollen.

Auf

Auf der Linie MN nimmt man alsdenn die Ruthen, auf AB die Fuße, und wenn man die Zolle haben will, so greift man sie auf den Linien AB, die durch die Theilungspunkte der Linien AE mit MN oder EF parallel gezogen worden.

Z. B. Will man 7 Zolle haben, so nimmt man sie aus der Parallel-Linie die durch die Zahl 7 in der Linie AE geht, zwischen den Punkten, wo die durch einerlei Zahlen in AB und EF gezogenen Linien diejenige durchschneiden, welche von einer Zahl der Linie AB nach der um 1 größern in der Linie EF gezogen worden, z. B. von f bis g.

Denn weil die Dreiecke BF 1, Bfg ähnlich sind, so ist nach §. 301, BF : Bf = F1 : fg.

Nun ist aber BF = AE und Bf = $\frac{7}{10}$ BF = $\frac{7}{10}$ AE. Folglich AE : $\frac{7}{10}$ AE = F1 : fg, oder 1 : $\frac{7}{10}$ = F1 : fg. Demnach fg = $\frac{7}{10}$ F1. Allein F1 = B1 = $\frac{1}{10}$ AB, das ist F1 = 1 Fuß, folglich ist fg = $\frac{7}{10}$ Fuß, das will sagen 7 Zoll.

Soll man z. B. 2 Ruthen 7′ 3″ nehmen, so setze man den Zirkel in p auf der dritten Parallel-Linie mit MN, von unten herauf gerechnet, öfne ihn bis an den Punkt, wo dieser Linie die von 7 in AB bis g in EF gezogene Linie durchschneidet, so ist po = 2 Ruthen, om = B7 = 7 Fuß, mn = 3 Zoll, folglich

pn = 2° 7′ 3″

und so in allen andern Fällen.

§. 323. Man sieht leicht, daß man nicht einmal nöthig hat, die mit gleichen Zahlen bezeichneten Punkte in AB, EF durch gerade Linien zusammen zu ziehen, sondern nur die von einer gewissen Zahl in AB nach der um 1 größern in EF, wenn man die Zeichnung nicht mit zu vielen Linien überladen will. Will man diesen Maasstaab verjüngen, so wird dazu nichts weiter erfordert, als daß man nur die eigentliche Größe der Ruthe des neuen Maasstaabes, nemlich ab, bestimme, und das Uebrige eben so mache wie §. 322.

Fig. 180.

Zwei und dreißigste Stunde.

Proporzionen bei dem Zirkel.

§. 324.

Fig. 181. In Zirkeln sind die Ausschnitte ACB, acb, deren Winkel an den Mittelpunkten gleich sind, einander ähnlich.

Man theile die Winkel ACB, acb in D und d in zwei gleiche Theile, die Winkel ACD, acd, BCD, bcd in E, e, F, f wieder in zwei gleiche Theile und setze diese Theilung so weit als man will, oder, wie man zu sagen pflegt, ins Unendliche fort.

fort. Zieht man alsdenn wenigstens in Gedanken die Linien AE, ED, DF, FB ꝛc. und in dem andern Zirkel ae, ed, ef, fb ꝛc. ferner von den Mittelpunkten C, c nach den Theilungspunkten die Halbmesser CE, CD, CF ꝛc. ce, cd, cf ꝛc. so entstehen so viel gleichschenkliche Dreiecke als Theilungspunkte sind, und diese sind in jedem Zirkel alle einander gleich und in beiden einander ähnlich, weil die Winkel an den Mittelpunkten gleich, und die Seiten, welche sie einschließen, proporzional sind, (§. 312.) und es ist beständig

$$BC : bc = BF : bf$$
$$BC : bc = FD : fd.$$
ꝛc. ꝛc.

weil BC, BF ꝛc. bc, bf ꝛc. einander gleich sind.

Es sind also in den Vielecken ABCBFDEA, acbfdea die Winkel einander gleich, und die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proporzional, die Anzahl der Seiten mag so groß sein als sie will.

Je größer man aber diese Anzahl nimmt, je näher kömmt die Summe der Seiten BF, FD, DE, EA dem Bogen BA und der Seiten bf, fd, de, ea ꝛc. dem Bogen ba, so daß, wenn man diese Anzahl so groß nimmt, daß sie größer ist als jede Anzahl die man sich denken kann, der Unterschied zwischen diesen Summen und den Zirkelbogen BA, ba kleiner ist als jede Größe die

man sich denken kann. Daher sind die Ausschnitte einander vollkommen ähnlich.

§. 325. Weil die Dreiecke ABC, abc ähnlich sind, folglich der Winkel BAC = bac, ABC = abc, so sind auch die Winkel BAE, bae und ABF, abf einander gleich, folglich die Vielecke ABFDEA, abfdea auch einander ähnlich, die Anzahl der Seiten mag so groß sein als sie will. Hieraus schließt man auf eben die Art, daß auch die Abschnitte ABD, abd, in denen die Winkel gleich sind, einander ähnlich sind.

§. 326. Weil endlich

$$AE : ae = AC : ae$$
$$ED : ed = AC : ae$$
$$DF : df = AC : ae$$
$$FB : fb = AC : ae$$

so ist auch $AE + ED + DF + FB : ae + ed + df + fb = AC : ae$. Demnach die Theile des Umkreises der Vielecke ACBF DEA, acbfdea, die zwischen den äußersten Punkten A, B, a, b liegen, wie die Halbmesser der Zirkel, zu denen sie gehören. Und dies findet immer statt, wie groß auch die Anzahl dieser Seiten ist.

Je größer man aber diese Anzahl nimmt, je weniger weicht diese Summe der Seiten von den Bogen AB, ab ab, und der Unterschied wird endlich so klein, daß er für nichts zu achten ist.

Daher verhalten sich auch in zweien Zirkeln die Bogen von ähnlichen Ausschnitten oder Abschnitten, das will sagen, die Bogen, die in zweien Zirkeln zu einerlei Winkeln am Mittelpunkte gehören, wie die Halbmesser, oder wie die Durchmesser.

§. 327. Wenn man entweder wirklich oder auch nur in Gedanken, den Umkreis eines Zirkels in eine gewisse beliebige Anzahl gleicher Theile theilt, $AB = BC = CD$ ꝛc. und die Theilungspunkte durch die Sehnen AB, BC, ꝛc. verbindet, so nennt man ein solches in einem Zirkel beschriebenes Vieleck ein ordentliches oder reguläres Dreieck, Viereck, Fünfeck ꝛc. weil alle Seiten und Winkel in demselben einander gleich sind. Fig. 182.

§. 328. Wenn man von dem Mittelpunkte O nach den Spitzen der Winkel in diesem regulären Vielecke die Halbmesser OA, OB ꝛc. zieht, so wird es dadurch in eben so viel einander vollkommen gleiche Dreiecke OAB, OBC ꝛc. getheilt als es Seiten hat, weil in jedem Dreiecke die Seiten so groß sind als in dem andern.

§. 329. Wenn man in zweien Zirkeln reguläre Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten beschreibt, so sind dieselben einander vollkommen ähnlich. Denn weil die Winkel an den Mittelpunkten gleich sind, so sind auch die übrigen Winkel einander gleich, nemlich $ABC = abc$, $BCD = bcd$ ꝛc. Es verhalten

sich also die Seiten wie die Halbmesser, oder wie die Durchmesser.

und weil $AB : ab = OA : oa$

$BC : bc = OA : oa$

$CD : cd = OA : oa$

&c. &c.

so ist auch $AB + BC + CD + \text{&c.} : ab + bc + cd + \text{&c.} = OA : oa$. Das will sagen: Die Umkreise zweier regulären Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten, die in verschiedenen Zirkeln beschrieben worden, verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der Zirkel.

§. 330. Man sieht leicht, daß dies auch statt findet, wenn die Vielecke zwar nicht regulär aber doch einander ähnlich sind. (§. 325.)

§. 331. Je größer die Anzahl der Seiten eines solchen in einem Zirkel beschriebenen regulären Vielecks ist, desto näher kommt die Summe aller Seiten oder der äußere Umfang desselben dem Umkreise des Zirkels, und wenn diese Anzahl, wie man zu sagen pflegt, unendlich groß angenommen wird, so weicht der Umkreis des Vielecks von dem Umkreise des Zirkels so wenig ab, daß der Unterschied geringer ist als jede Größe die man angeben oder sich denken kann. Daher beide einander gleich gesetzt werden können.

Es verhalten sich daher sowohl die ganzen als halben Umkreise oder Peripherien wie

die

die Halbmesser oder Durchmesser der Zirkel, zu denen sie gehören.

§. 332. Hieraus sieht man leicht wie man es anfangen müsse, um den Umkreis des Zirkels wenigstens so genau zu finden, daß man dabei keinen Fehler begehe, der gegen den ganzen Umkreis in Betrachtung komme

Man beschreibe nemlich in dem Zirkel ein beliebiges reguläres Vieleck und berechne den Umkreis desselben, so wird zwar der Umkreis des Zirkels dem Umkreise des Vielecks nicht vollkommen gleich sein, allein der Unterschied wird desto geringer sein, je größer die Anzahl der Seiten des Vielecks ist.

Hat man also ein reguläres Vieleck von einer gewissen Anzahl Seiten beschrieben und nach der vorigen Voraussetzung den Umkreis des Zirkels berechnet, und der Unterschied scheint zu groß zu sein, so beschreibe man ein reguläres Vieleck, welches noch einmal so viel Seiten hat, so wird der Umkreis desselben dem Umkreise des Zirkels noch näher kommen; und so kann man fortgehen und die Fehler immer mehr und mehr vermindern. Weiter unten werde ich diese Berechnung zeigen und hier nur anmerken, daß man dies Verfahren, den Umkreis des Zirkels zu finden, den Zirkel rectifiziren nenne.

§. 333. Wenn man von dem Mittelpunkte O auf die Seiten des darin beschriebenen regulären Vielecks die geraden Linien OP zieht, so sind dieses

dieses die Höhen der Dreiecke AOB, BOC ꝛc. und alle einander gleich. (§. 151. 180. 182.) Zieht man nun eine gerade Linie und setzt darauf entweder wirklich oder wenigstens in Gedanken, diese Dreiecke, so wie sie folgen, neben einander, so ist die Summe ihrer Grundlinien dem Umkreise des Vielecks, und die Summe alle dieser Dreiecke dem Vielecke gleich. Nimmt man auf einer andern geraden Linie ab = AB; bc = BC; cd = CD ꝛc. und beschreibt über ab ein Dreieck abo, das dem Dreiecke ABO vollkommen folglich auch die Höhe OP des erstern der Höhe op des letztern gleich ist (§. 151) und zieht hernach die Linien co, do, eo ꝛc. so sind die Dreiecke abo, bco, cdo, deo ꝛc. den Dreiecken ABO, BCO, CDO, DEO ꝛc. gleich; folglich ist auch das Dreieck nao, das aus den andern zusammengesetzt ist, den Dreiecken ABO, BCO ꝛc. zusammen genommen, das will sagen, dem Vielecke ABCDEFGHA gleich.

Ein in einem Zirkel beschriebenes reguläre Vieleck ist demnach einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise des Vielecks und die Höhe der geraden Linie gleich ist, die von dem Mittelpunkte des Zirkels auf eine von den Seiten des Vielecks perpendikulär gezogen werden kann, oder der Entfernung der Seiten vom Mittelpunkte.

§. 335. Nimmt man nur einen Theil des Vielecks, z. B. die Dreiecke ABO, BCO, CDO,

so ist diese Summe oder der Ausschnitt ABCDO einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie dem Theile ABCD des Umfangs des Vielecks, und die Höhe der Entfernung der Seiten des Vielecks vom Mittelpunkte gleich ist.

§. 336. Man sieht leicht, daß man auf diese Art auch ein Dreieck finden kann, welches der Fläche, die von dem Umkreise eines Zirkels eingeschlossen wird, wenigstens so nahe kömmt, daß der Unterschied nicht verdient in Betrachtung gezogen zu werden. Denn das in den Zirkel beschriebene Vieleck mag noch so viel Seiten haben, so bleibt das, was §. 333 gezeigt worden, immer richtig. Je größer aber die Zahl der Seiten angenommen wird, desto kleiner werden sie (§. 183.) die Entfernung der Seiten vom Mittelpunkte aber desto größer. Wird nun die Zahl der Seiten unendlich groß angenommen, so kann man den Umkreis des Vielecks dem Umkreise des Zirkels und die Entfernung OP der Seite von dem Mittelpunkt dem Halbmesser des Zirkels gleich annehmen, weil der Unterschied zu geringe ist als daß er verdiente in Betrachtung gezogen zu werden. Man kann also ohne einen andern als einen unendlich kleinen Fehler, das ist, ohne einen Fehler zu begehn, sagen. Der Zirkel ist so groß als ein in demselben beschriebenes reguläre Vieleck, das eine unendliche Anzahl Seiten hat, und folglich

Der

Der Zirkel ist so groß als ein Dreieck, dessen Grundlinie dem Umkreise des Zirkels die Höhe aber dem Halbmesser gleich ist.

§. 337. Es folgt hieraus also, daß jeder Ausschnitt ACB eines Zirkels einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundlinie dem Bogen AB des Ausschnits und die Höhe dem Halbmesser des Zirkels gleich ist. Fig. 181.

§. 338. Dies Verfahren nennt man den Zirkel Quadriren. Es giebt Leute, die sich einbilden, auf die Erfindung dieser Quadratur sei eine große Belohnung bei allen Akademien in Europa ausgesetzt. Weil nun der Geiz eine Wurzel alles Uebels ist, so hat dieser Wahn auch vielen sonst biedern und ehrlichen Leutchen den Kopf verrückt. Diese Herren können sich aber darauf verlassen, daß kein Dreier auf die Quadratur des Zirkels gesetzt sei, und wirklich ist sie nicht einen Dreier werth. Denn der Geometer hat sie so genau als er sie braucht, das will sagen, wenn der Halbmesser des Zirkels auch hundert tausend Millionen Meilen enthielte, so würde er ein Dreieck angeben oder bestimmen können, welches dem Zirkel so nahe käme, daß der Unterschied nicht so groß wäre als das Quadrat des 1000000sten Theils eines rheinländischen Zolles. Man urtheile nun, wie groß dieser Fehler sey? und ob man eine genauere Quadratur nöthig habe.

Drei und dreißigste Stunde.

Proporzionen bei dem Zirkel.

§. 339.

Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Zirkels angenommenen Punkt zwei gerade Linien zieht, welche den Umkreis desselben in den Punkten B, C, D, E durchschneiden, so sind die Theile z. B. AD, AE der einen Linie die mittlern Proporzional-Linien zwischen den Theilen AB, AC der andern Linie, oder es ist Fig. 186. 187.

$$AB : AD = AE : AC.$$

Man ziehe die Linien BE, DC, so sind die Winkel BCD, AEB einander gleich, weil sie auf einerlei Bogen stehen, (§. 194) ferner sind auch die Winkel bei A einander gleich; folglich die Dreiecke ABE, ADC ähnlich, (§. 309.) und daher ist $AB : AD = AE : AC$

§. 340. Wenn der Punkt A innerhalb des Zirkels genommen wird, so kann man die Linie DE so ziehen, daß sie in A in zwei gleiche Theile getheilt wird; denn man darf nur von dem Mittelpunkt O nach A eine gerade Linie und darauf DE perpendikulär ziehn, so fällt entweder BC auf dieſe

diese Linie OA in Fig. 188, oder nicht, wie Fig. 189. In beiden Fällen ist aber

$$AB : AD = AE : AC$$

und weil $AD = AE$

$$AB : AD = AD : AC.$$

Folglich ist in diesen Fällen AD die mittlere Proporzional-Linie zwischen AB und AC.

§. 341. Wenn die Linie AD den Zirkel in D berührt, so kann man sich vorstellen, daß die Punkte D und E einander immer näher kommen und endlich auf einander fallen, so daß die Linie DE verschwinde oder $AD = AE$ werde. In diesem Falle ist denn ebenfalls $AB : AD = AD : AC$. Fig. 190.

Es läßt sich aber auch so beweisen.

Man ziehe BE, so ist der Winkel BDA dem Winkel ACD gleich, (§. 199) den Winkel DAC aber haben die Dreiecke ABD, ACD gemeinschaftlich, demnach ist auch der Winkel ABD dem Winkel ADC gleich; folglich sind diese Dreiecke einander ähnlich. (§. 309.) Demnach ist

$$AB : AD = AD : AC.$$

§. 342. Zwischen zwei gegebenen geraden Linien AB, AC lassen sich nach dem vorigen allezeit zwei Proporzional-Linien finden, und wenn dabei nichts weiter bestimmt wird, so kann man so viel finden als man will. Wenn aber diese Linien gewisse Eigenschaften haben sollen, z. B. wenn

wenn die Differenz oder Summe derſelben einer gegebenen andern Linie gleich ſein ſoll; ſo ſchränken dieſe Bedingungen die Beantwortung der Frage etwas ein. Alsdenn verfährt man dabei folgender Geſtalt am leichteſten.

§. 343. Zwiſchen zwei gegebenen geraden Linien zwei Proporzional-Linien zu finden, deren Differenz einer gegebenen Linie gleich ſei.

Man nenne eine von den gegebenen Linien q, die andere r, und p die Differenz derjenigen die man ſucht. Hierauf ziehe man zwei gerade Linien, welche ſich bei A unter einem rechten Winkel durchſchneiden; nehme auf der einen AB = p, auf der andern AC = q, AD = r, theile AB in E, und die ganze Linie CD in F in zwei gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte E, F Linien auf AB, CD perpendikulär, welche ſich in G durchſchneiden. Fig. 191.

Dieſen Punkt G nehme man zum Mittelpunkte eines Zirkels an, beſchreibe aus demſelben durch den Punkt C einen Zirkel, der auch durch den Punkt D gehn und die Linie AB, wenn ſie verlängert wird, in H und K durchſchneiden wird. Dieſe Linien AH, AK ſind alsdenn die verlangten.

Denn nach §. 339 iſt AC : AH = AK : AD. Weil aber G der Mittelpunkt des Zirkels und GE auf der Sehne HK perpendikulär iſt, ſo iſt HE = EK. (§. 174.) Wir haben aber auch AB in E in zwei gleiche Theile getheilt, folg-

diese Linie OA in Fig. 188, oder nicht, wie Fig. 189. In beiden Fällen ist aber

$$AB : AD = AE : AC$$

und weil $AD = AE$

$$AB : AD = AD : AC.$$

Folglich ist in diesen Fällen AD die mittlere Proporzional-Linie zwischen AB und AC.

§. 341. Wenn die Linie AD den Zirkel in D berührt, so kann man sich vorstellen, daß die Punkte D und E einander immer näher kommen und endlich auf einander fallen, so daß die Linie DE verschwinde oder $AD = AE$ werde. In diesem Falle ist denn ebenfalls $AB : AD = AD : AC$. Fig. 190.

Es läßt sich aber auch so beweisen.

Man ziehe BE, so ist der Winkel BDA dem Winkel ACD gleich, (§. 199) den Winkel DAC aber haben die Dreiecke ABD, ACD gemeinschaftlich, demnach ist auch der Winkel ABD dem Winkel ADC gleich; folglich sind diese Dreiecke einander ähnlich. (§. 309.) Demnach ist

$$AB : AD = AD : AC.$$

§. 342. Zwischen zwei gegebenen geraden Linien AB, AC lassen sich nach dem vorigen allezeit zwei Proporzional-Linien finden, und wenn dabei nichts weiter bestimmt wird, so kann man so viel finden als man will. Wenn aber diese Linien gewisse Eigenschaften haben sollen, z. B.

wenn

wenn die Differenz oder Summe derſelben einer gegebenen andern Linie gleich ſein ſoll; ſo ſchränken dieſe Bedingungen die Beantwortung der Frage etwas ein. Alsdenn verfährt man dabei folgender Geſtalt am leichteſten.

§. 343. Zwiſchen zwei gegebenen geraden Linien zwei Proporzional-Linien zu finden, deren Differenz einer gegebenen Linie gleich ſei.

Man nenne eine von den gegebenen Linien q Fig. die andere r, und p die Differenz derjenigen die 191. man ſucht. Hierauf ziehe man zwei gerade Linien, welche ſich bei A unter einem rechten Winkel durchſchneiden; nehme auf der einen AB = p, auf der andern AC = q, AD = r, theile AB in E, und die ganze Linie CD in F in zwei gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte E, F Linien auf AB, CD perpendikulär, welche ſich in G durchſchneiden.

Dieſen Punkt G nehme man zum Mittelpunkte eines Zirkels an, beſchreibe aus demſelben durch den Punkt C einen Zirkel, der auch durch den Punkt D gehn und die Linie AB, wenn ſie verlängert wird, in H und K durchſchneiden wird. Dieſe Linien AH, AK ſind alsdenn die verlangten.

Denn nach §. 339 iſt AC : AH = AK : AD. Weil aber G der Mittelpunkt des Zirkels und GE auf der Sehne HK perpendikulär iſt, ſo iſt HE = EK. (§. 174.) Wir haben aber auch AB in E in zwei gleiche Theile getheilt, folglich

ferner ist EA = EB. Demnach auch HE — EA = EK — EB oder AH = BK und daher

$$AK = AB + BK = AB + AH,$$

Folglich $AK - AH = AB$.

Es ist also die Differenz der beiden gefundenen Linien AK und AH der Linie AB oder p gleich, so wie es die Bedingung der Aufgabe erforderte.

§. 344. Nennt man die Linie AH, x; so wird $AK = p + x$, und die Proporzion kann so geschrieben werden

$$q : x = p + x : r.$$

Nennt man aber AK, x, so wird $AH = x - p$, und wir haben

$$q : x - p = x : r$$

Eine jede Frage oder Aufgabe, die zuletzt auf eine von diesen Proporzionen führt, kann auf diese Art aufgelöset werden.

§. 345. Wenn $q = r$, so wird AC = AD, der Punkt F fällt in A, und der Mittelpunkt G des Zirkels in E. Ist nun auch überdies $p = r$, so erhält man diese Proporzionen.

1) $r : x = r + x : r$

oder

oder 2) $r : x = r \pm x : n$,

nachdem man AH oder AK x nennt.

§. 346. Auf diese Art kann man auch eine gegebene Linie AC in B dergestalt theilen, daß der eine Theil die mittlere Proporzional-Linie zwischen der ganzen Linie und dem andern Theile oder daß

$$AC : AB = AB : BC$$

ist.

Man verlängere AC, ziehe durch A eine Perpendikulär-Linie AD = AC; AF = AC; AH = AC; theile AD in E in zwei gleiche Theile, und beschreibe aus dem Mittelpunkte E mit dem Halbmesser EF = EH einen Zirkel, welcher AC in B, und wenn sie gehörig verlängert wird, in G schneidet, so ist B der Punkt in der Linie AC, der zu suchen war. 21 Fig. 192.

Denn weil E der Mittelpunkt des Zirkels ist, so ist EB = EG, und weil auch EA = ED gemacht worden, so ist EG — ED = EB — EA oder DG = AB.

Ferner ist AF : AB = AG : AH, oder weil AF = AH = AC = AD

$$AC : AB = AG : AD \quad (§.\ 14, n.\ 1)$$

Demnach auch

$$AC - AB : AB = AG - AD : AD \quad (§.\ 175.)$$

oder $BC : AB = DG : AD$

das ist $BC : AB = AB : AC$

oder $AC : AB = AB : BC$

§. 347. Soll man hingegen zwischen zwei gegebenen geraden Linien q und r zwei Proporzional-Linien finden, deren Summe p ist, so verfährt man so.

Fig. 193. Man zieht zwei gerade Linien, die sich bei A unter einem rechten Winkel durchschneiden, nimmt auf der einen $AB = p$; auf der andern nach eben der Seite zu $AC = q$, $AD = p$; theilt AB in E, und die Differenz der Linien AD, AC in F in zwei gleiche Theile, richtet in E und F auf AB, AD Perpendikulärlinien auf, die sich in G durchschneiden; nimmt G zum Mittelpunkte und beschreibt mit dem Halbmesser GC einen Zirkel, der auch durch D geht. Wenn nun dieser Zirkel die Linie AB in H und K schneidet, so sind AH, AK die verlangten Linien.

Denn, daß $AC : AH = AK : AD$, ist nach §. 339 keinem Zweifel unterworfen; es ist nur noch die Frage, ob diese beiden Linien auch die andere Bedingung erfüllen, nemlich ob ihre Summe, das ist, ob $AH + AK = AB = p$ ist?

Zu dem Ende bemerke ich, daß, weil man $AE = EB$ gemacht hat, und HK eine Sehne ist, auf der die Linie GE von dem Mittelpunkte perpendi-

perpikulär gezogen worden, auch HE = EK ist. Demnach ist auch

$$AE - EH = EB - EK$$

oder $AH = KB$.

Folglich ist auch $AH + AK = KB + AK$

oder $AH + AK = AB = p$.

Folglich erfüllen die Linien AH, AK auch die zweite Bedingung.

§. 348. Nennt man AH, x, so wird $AK = p - x$, und es ist $q : x = p - x : r$; nennt man aber AK, x, so wird $KB = AH = p - x$, und es ist wieder

$$q : p - x = x : r$$

so daß beide Proporzionen blos darin unterschieden sind, daß in der zweiten die mittlern Glieder vertauscht werden.

§. 349. Es kann geschehen, daß der Zirkel die Linie AB blos berührt, alsdenn fallen die Punkte H und K zusammen in E, und man findet nur eine mittlere Proporzional-Linie zwischen q und r, oder zwei, die einander und zusammen genommen der Linie AB gleich sind.

Die Linie AC, AD, AB können aber nicht so beschaffen sein, daß, wenn man nach der vorhin angezeigten Methode verfährt, der Zirkel die Linie AB gar nicht durchschneide oder berühre. Wenn dieser Fall vor-

bekommt, ist es unmöglich, zwischen den zwei geraden Linien AC, AD zwei mittlere Proporzional-Linien zu finden, deren Summe der gegebenen Linie AB = p gleich sei.

§. 349. Zwischen zwei gegebenen geraden Linien AB, BC die mittlere Proporzional-Linie zu finden.

Fig. 194

Man ziehe eine gerade Linie und setze auf derselben die Linien AB, BC an einander, theile hierauf die Summe derselben oder AC in E in zwei gleiche Theile; beschreibe aus dem Mittelpunkte E mit dem Halbmesser AE = EC einen Zirkel, richte in dem Punkte B, wo die Linien an einander stoßen, eine Perpendikulär-Linie auf, welche den Zirkel in D durchschneide, so ist BD die verlangte mittlere Proporzional-Linie.

Denn wenn man die Linien AD, DC zieht, so ist ADC ein rechtwinkliches Dreieck, folglich ist nach (§. 313. 314.)

$$AB : BD = BD : BC$$

und daher BD die mittlere Progorzional-Linie (§. 314.)

§. 350. Diese Aufgaben sind in der Geometrie von großem Nutzen, vorzüglich aber in der Algebra oder vielmehr in der mathematischen Erfindungskunst, denn dieses ist eigentlich die Algebra. Bei den mehresten Auflösungen kommt man zuletzt auf sogenannte Gleichungen, die sich in die vorhin angeführte Proporzionen verwan-

dein

den laſſen, und dann iſt die Sache ſo gut als abgethan. Dies iſt eben die Urſache, warum ich ſie angeführt habe, damit derjenige, der gisdenn in der Folge weiter gehen will, den Weg dadurch ſchon etwas gebähnd finden möge.

Vier und zwanzigſte Stunde.

Zuſammengeſetzte Verhältniſſe.

§. 351.

Wenn wir das Verfahren, deſſen wir uns bei dem Meſſen gerader Linien bedient haben, etwas genauer unterſuchen, ſo finden wir leicht, daß wir die Verhältniß zweier Linien oder Größen überhaupt A und B gegen einander eigentlich durch Hülfe der Verhältniß bekommen, welche jede von dieſen Größen zu dem angenommenen Maaße M hat. Man kann daher die Verhältniß A zu B ſo betrachten, als ob ſie aus den Verhältniſſen A : M und M : B zuſammengeſetzt ſei. Man kann hieraus zugleich mit vieler Wahrſcheinlichkeit vermuthen, wo man das Verhältniß einer gewiſſen Größe zu einer andern von eben der Art nicht anders als durch Hülfe dreier, vier, fünf und mehrerer Ver-

hältnisse werde entdecken können, und wirklich sind diese Fälle in der Geometrie und überhaupt in allen Theilen der mathematischen, physischen ꝛc. Wissenschaften sehr häufig. Dieses Zusammensetzen der Verhältnisse wollen wir nun näher betrachten, und in dieser Absicht uns erst darüber deutlicher erklären.

§. 352. Wenn K : L = A : B

M : N = B : C

P : Q = C : D

R : S = D : E

ꝛc. ꝛc.

Das ist: wenn das nachfolgende Glied B in der Verhältniß A : B das vorangehende Glied in der Verhältniß B : C, in dieser das nachfolgende Glied C wieder das vorangehende in der Verhältniß C : D ꝛc. ist, und diese Verhältnisse werden durch andere gegeben, oder sind den Verhältnissen K : L; M : N; P : Q; ꝛc. gleich, so sagt man: die Verhältniß A : B sei einfach; die Verhältniß A : C aus den beiden Verhältnissen K : L, M : N, die Verhältniß A : D aus den dreien Verhältnissen K : L, M : N, P : Q oder die Verhältniß A : C aus den Verhältnissen A : B und B : C; die Verhältniß A : D

aus

aus den Verhältnissen A : B, B : C, C : D ꝛc. zusammen gesetzt.

Eigentlich will dies Zusammensetzen nur so viel sagen: Um die Verhältniß der Größe A zu C zu erfahren, werden die Verhältnisse K zu L, M : N erfordert; die Verhältniß A : D wird durch die drei Verhältnisse K : L, M : N, P : Q bestimmt und so fort.

§. 353. Die Größen A, B, C, D ꝛc. sind alle von einerlei Art und müssen von einerlei Art sein, weil eine aus der andern entsteht. In jeder von den übrigen Verhältnissen sind sie zwar auch von einerlei Art, allein diejenigen, welche in einer Verhältniß vorkommen, können mit den Größen in einer andern Verhältniß von sehr verschiedener Art sein. So z. B. können in der Verhältniß K : L die Größen Linien, in der Verhältniß M : N Flächen, in der Verhältniß P : Q Winkel, in der Verhältniß R : S Kräfte ꝛc. sein.

§. 354. Eine jede Verhältniß kann aus so vielen andern Verhältnissen als man will zusammengesetzt werden. Gesetzt z. B. man wollte die Verhältniß A : E aus vier andern zusammen setzen, so nehme man die Größen B, C, D nach Gefallen an; ferner nehme man die vier vorangehenden Glieder K, M, P, R, und suche die nachfolgenden durch die Proportionen

A : B = K : K

$$B : C = M : N$$

$$C : D = P : Q$$

$$D : E = R : S$$

Wie diese Glieder L, N, Q, S gefunden werden, ist aus der Lehre von den Verhältnissen bekannt.

So kann man z. B. die Verhältniß 5 : 12 aus den Verhältnissen 1 : 3; 20 : 36; 9 : 14; 7 : 2 zusammensetzen, wenn man B = 15; C = 27, D = 42 und K = 1, M = 20; P = 9; R = 7 sucht. Denn alsdenn ist

$$5 : 15 = 1 : 3$$

$$15 : 27 = 20 : 36$$

$$9 : 27 : 42 = 9 : 14$$

$$42 : 12 = 7 : 2$$

Und so wie dies mit Zahlen, kann es auch durch Linien geschehen.

§. 354. Wenn aber die Verhältnisse gegeben sind, aus denen eine gewisse Verhältniß zusammengesetzt werden soll, so hänget es nicht mehr von unserer Willkühr ab, aus welchen Verhältnissen wir eine Verhältniß zusammensetzen wollen, sondern wir müssen uns lediglich an die gegebenen halten. Die Verhältniß, die aus den gegebenen

zusammen gesetzt werden soll, läßt sich aber nach dem was (§. 352.) gezeigt worden, leicht finden.

Wenn nemlich z. B. die Verhältniß A : Z aus den Verhältnissen K : L; M : N; P : Q; R : S zusammengesetzt werden soll, wie auch übrigens die darin vorkommenden Größen beschaffen sein mögen. Denn weil die Größen in jeder Verhältniß auf eine gewisse Art aus einer dritten Größe entstehen, die mit ihnen von einerlei Art ist, so wird man jede durch Zahlen ausdrücken können, die sich auf eine gewisse Größe beziehen, und daher setzen können:

$$K : L = mF : nF$$
$$M : N = pG : qG$$
$$P : Q = rH : sH$$
$$R : S = tI : vI$$

das will sagen $K : L = m : n$

$$M : N = p : q$$
$$P : Q = r : s$$
$$R : S = t : v$$

folglich wird sein (§. 352)

$$m : n = A : B$$

P :

$$p : q = B : C$$

$$r : s = C : D$$

$$t : v = D : Z$$

Nun findet man nach (§. 234.)

$$B = \frac{n}{m} \cdot A$$

$$C = \frac{q}{p} \cdot B = \frac{q}{p} \cdot \frac{n}{m} \cdot A$$

$$D = \frac{s}{r} C = \frac{s}{r} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{n}{m} \cdot A$$

$$Z = \frac{t}{v} \cdot D = \frac{t}{v} \cdot \frac{s}{r} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{n}{m} \cdot A$$

oder auch $B = \frac{n}{m} A$; $D = \frac{sqn}{rpm} A$;

$C = \frac{qn}{pm} \cdot A$; $Z = \frac{tsqn}{vrpm} \cdot A$;

und so geht man weiter, wenn die Verhältniß A : Z aus mehreren Verhältnissen zusammen gesetzt werden soll.

Es ist daher auch $vrpmZ = tsqrA$

folglich $A : Z = trpm : vrpn$

Das will sagen:

Die Größe A verhält sich zu der Größe Z wie das Produkt aus den Zahlen, durch welche die vorangehenden Glieder der gegebenen Verhältnisse ausgedruckt werden, zu

dem

dem Produkte aus den Zahlen, durch welche die nachfolgenden Glieder ausgedrückt werden.

Oder die aus den Verhältnissen K : L, M : N, P : Q, R : S zusammengesetzte Verhältniß A : Z ist der Verhältniß des Produkts aus den Zahlen, durch welche die vorangehenden Glieder ausgedrückt werden, zu dem Produkte aus den Zahlen, durch welche die nachfolgenden Glieder ausgedrückt werden, gleich.

§. 355. Will man daher die Verhältniß A : Z in Zahlen finden, welche aus den Verhältnissen K : L, M : N, P : Q, R : S zusammen gesetzt ist, so drücke man diese Verhältnisse durch Zahlen aus, und multiplizire hierauf die vorangehenden Glieder in einander, und die nachfolgenden auch in einander, so verhält sich das Produkte aus den ersten zu dem Punkt aus den zweiten wie A zu Z, das ist

trqn : vsqn = A : Z.

Z. E. wenn K : L = 3 : 5
M : N = 2 : 7
P : Q = 8 : 13
R : S = 4 : 11

so ist A : Z = 3. 2. 8. 4 : 5. 7. 13. 11

oder

oder

$$A : Z = 192 : 5005.$$

§. 356. Die Verhältniß A : Z wird auch nicht verändert, man mag die Ordnung der auf einander folgenden Verhältnisse, aus denen sie zusammen gesetzt werden soll, annehmen wie man will. Wenn man nemlich

$$M : N = A : b$$

$$R : S = b : c$$

$$K : L = c : d$$

$$P : Q = d : X$$

setzt, so wird doch die Verhältniß A : X der Verhältniß A : Z vollkommen gleich und Z : X sein. Wenn nunmehr ist

$$p : q = A : b$$

$$t : v = b : c$$

$$m : n = c : d$$

$$r : s = d : X$$

folglich ist $X = \frac{snvq}{rmtp} \cdot A$ (§. 354.)

Weil nun snvq = vsqn und rmtp = trpm (§. 254.)

so

so ist auch $X = \frac{vinz}{trpm}$, das will sagen

$$X = Z$$

§. 357. Wenn in den Verhältnissen K : L, M : N, aus denen eine Verhältniß A : Z zusammen gesetzt werden soll, alle von einerley Art sind, z. B. alle Linien oder alle Flächen, oder alle Gewichte ꝛc. so wird eben die Verhältniß A : Z herausgebracht, wenn man auch die vorangehenden Glieder unter sich verwechselt, oder die nachfolgenden. Wenn nemlich

$$A : L = A : B$$
$$M : N = B : Z$$

so ist auch $A : N = A : B'$

$$M : L = B' : Z$$

oder $M : L = A : B''$

$$K : N = B'' : Z$$

Denn weil die Größen alle von einerley Art sind, so kann man sicher annehmen, daß sie auf eine gewisse Art aus einer gewissen Größe von eben der Art entstehen, z. B. aus dem Maaße. Es wird also, wenn V für diese Größe in Gedanken angenommen wird,

$$K = mV \quad M = pV$$
$$L = nV \quad N = qV$$

gesetzt werden können, so daß m, n, p, q diejenigen ganzen oder gebrochnen, oder sonst bestimmte Zahlen sind, welche die Art der Entstehung dieser Größen aus V anzeigen. Alsdenn haben wir

$$mV : nV = m : n = K : L$$

$$pV : qV = p : q = M : N$$

Folglich auch $m : n = A : B$

$$p : q = B : Z$$

folglich $Z = \frac{qn}{pm} \cdot A$ (§. 355.)

Im zweiten Fall $m : q = A : B'$

$$p : n = B' : Z$$

folglich $Z = \frac{nq}{pm} \cdot A$ (§. 355.)

Im dritten Fall $p : n = A : B''$

$$m : q = B'' : Z$$

folglich auch $Z = \frac{qn}{mp} \cdot A$ (§. 355.)

Weil nun $qn = nq$ und $pm = mp$ (§. 254.) so bekömmt man in allen diesen Fällen offenbar immer dieselbe Größe Z, man mag die Glieder verwechseln wie man will.

Vier

Vier und dreißigste Stunde.

Fortsetzung.

§. 358.

Wenn unter den Verhältnissen, aus denen eine Verhältniß A : Z zusammen gesetzt werden soll, mehrere sind, wo vier Größen von einerlei Art vorkommen, so können diese Verhältnisse so mit einander verwechselt werden, daß diejenigen, die zwischen Größen von einerlei Art statt finden, unmittelbar auf einander und die übrigen nachher folgen, ohne daß die aus denselben zusammengesetzte Verhältniß dadurch verändert wird. Z. B. wenn

K : L = A : B

M : N = B : C

P : Q = C : D

R : S = D : E

T : Y = E : Z

und es sind K, L, P, Q, R, S Größen von einerlei Art, M und N aber von einer andern Art, und T, Y ebenfalls von einer Art, die von den vorhergehenden verschieden ist; so wird man sich ebenfalls wie vorhin vorstellen können, daß

$$K = mV, \quad L = nV$$

$$P = rV, \quad Q = sV$$

$$R = tV, \quad S = vV$$

$$M = pF, \quad N = qF$$

$$T = xG, \quad Y = yF$$

ist.

Alsdenn aber können wir nach §. 356 annehmen:

$$m : n = A : b$$

$$r : s = b : c$$

$$t : v = c : d$$

$$p : q = d : e$$

$$x : y = e : X$$

und es wird $A : X = xptrm : yqvsn$ sein §. 355. Lassen wir aber die Verhältnisse so auf einander folgen

$$K : L = m : n = A : B$$

$$M : N = p : q = B : C$$

$$P : Q = r : s = C : D$$

$$R : S = t : v = D : E$$

T

$$T : Y = x : y = E : Z$$

so wird $A : Z = xtrpm : yvsqn$

Weil nun $xtrpm = xptrm$ und $yvsqn$ $yqvsn$ (§. 254.) so ist $A : Z = A : X$

folglich $X = Z$

§. 359. Nunmehr kann man aber auch die vorangehenden und nachfolgenden Glieder der Verhältnisse, die zwischen Größen von einerley Art statt finden, verwechseln (§. 357.) und z. B. so setzen:

$$K : Q = A : f$$

$$P : S = f : g$$

$$R : L = g : h$$

$$M : N = h : i$$

$$T : Y = i : W$$

das ist

$$m : s = A : f$$

$$r : v = f : g$$

$$t : n = g : h$$

$$p : q = h : i$$

$$x : y = i : W$$

und es wird $A : W = xptrm : yqnvs$ sein.

Nun ist aber xptrm = xtrpm und yqnvs = yvsqn (§. 254.) folglich

$$A : W = A : Z$$

also auch $W = Z$ (§. 272.)

Man mag also sowohl die Verhältnisse aus denen eine andere zusammen gesetzt werden soll, unter sich, als überdies noch die vorangehenden und nachfolgenden Glieder der Verhältnisse zwischen Größen von einerlei Art unter sich verwechseln wie man will, so wird dadurch die zusammengesetzte Verhältniß nicht geändert.

§. 360. Auf diese Art läßt sich das Zusammensetzen der Verhältnisse oft sehr abkürzen. Wenn z. B.

$$M : N = A : B$$

$$P : Q = B : C$$

$$N : R = C : D$$

$$S : P = D : E$$

$$T : V = E : Z$$

so sind offenbar die Größen M, N, R von einerlei Art, P, Q und S entweder von eben der oder von einer andern Art, weil nach der Natur der Verhältnisse eine aus der andern entsteht, T und

und V aber können noch von einer dritten Art sein. Läßt man nun die Verhältnisse so auf einander folgen

$$M : N$$
$$N : R$$
$$P : Q$$
$$S : P$$
$$T : V$$

und verwechselt zugleich die vorangehenden Glieder unter sich, und eben so die nachfolgenden, so daß

$$N : N = A : A$$
$$M : R = A : b$$
$$P : P = b : b$$
$$S : Q = b : c$$
$$T : V = c : X$$

oder so

$$N : N = A : A$$
$$P : P = A : A$$
$$M : R = A : b$$
$$S : Q = b : c$$
$$T : V = c : X$$

so ist die Verhältniß A : X nur aus den dreien Verhältnissen M : R, S : Q, T : V zusammen gesetzt; sie ist aber auch der Verhältniß A : Z gleich (§. 259.) und hieraus folgt denn, daß wenn verschiedene Verhältnisse zusammen zu setzen sind, und es kommen darin Größen vor, welche bei einigen das vorangehende bei andern aber das nachfolgende Glied sind, man von diesen vorangehenden Gliedern alle diejenigen weglassen kann, die zugleich als nachfolgende Glieder vorkommen, ohne daß dadurch in der zusammen gesetzten Verhältniß etwas geändert wird.

§. 361. Wenn daher A : B = C : D

B : E = D : F

so wird A : E = C : F

Denn wenn man die Glieder der Verhältnisse verwechselt, so ist §. 356

B : B = D : D

A : E = C : F.

§. 362. Eben so wenn A : B = C : D

E : B = C : F

so wird A : E = F : D.

Denn wenn man die Verhältnisse umkehrt, so ist

$$A : B = C : D$$

$$B : E = F : C$$

folglich $A : E = F : D$ (§. 360)

§. 363. Wenn aber $A : B = M : N$

und $C : D = N : M$

das ist, wenn zwei Verhältnisse, von denen die eine der andern umgekehrt genommen gleich ist, zusammen gesetzt werden, so entsteht daraus eine Verhältniß zweyer gleichen Größen, oder eine Verhältniß, in der das vorangehende Glied dem nachfolgenden gleich ist.

Denn die Verhältniß, welche aus A : B und C zu D zusammen gesetzt wird, ist der Verhältniß gleich, welche aus M : M und N : N zusammen gesetzt wäre. Dies ist aber eine Verhältniß gleicher Größen. §. 358.

Oder wenn man $M = mP$, $N = nP$ setzt, so wird

$$A : B = m : n$$

$$C : D = n : m$$

also die Verhältniß, die aus den Verhältnissen A : B, C : D, von denen die zweite der ersten umgekehrt genommen gleich ist, ist die Verhältniß mn : mn, in der die Glieder offenbar einander gleich sind.

§. 364. Wenn $M : N = m : n$

$P : Q = p : q$

$R : S = r : s$

so ist die Verhältniß, welche aus der Zusammensetzung der Verhältnisse $M : N$, $P : Q$, $R : S$ entsteht, derjenigen gleich, welche aus der Zusammensetzung der Verhältnisse $m : n$, $p : q$, $r : s$ entstehe

Denn wenn man nimmt

$M : N = A : B$ und $m : n = A : b$

$P : Q = B : C$ $p : q = b : c$

$R : S = C : D$ $r : s = c : d.$

so wird auch §. 14. n. 1.

$M : N = A : b$ folglich $A : B = A : b$

$P : Q = b : c$ $B : C = b : c$

$R : S = c : d$ $C : D = c : d.$

Demnach ist $b = B$, $c = C$, $d = D$

und $A : d = A : D$ (§. 272.)

§. 365. Wenn in den Proporzionen

$m : n = M : N$

$p : q = P : Q$

die

alle Glieder Zahlen sind, so sind die Produkte aus den vorangehenden und nachfolgenden Gliedern in einander ebenfalls proportional in der Ordnung wie sie auf einander folgen. Es ist nemlich

$$mp : nq = MP : NQ \quad (\S. 365 \text{ und } 363)$$

§. 366. Eben so wenn

$$m : n = M : N$$
$$p : q = P : Q$$
$$r : s = R : S$$
$$t : v = T : V$$
$$\text{&c.} \quad : \quad \text{&c.}$$

es mögen noch so viel Glieder seyn, so ist auch

$$mprt : nqsv = MPRT : NQSV$$

wenn sie nur alle Zahlen sind.

Wenn z. B.

$$3 : 5 = 6 : 10$$
$$7 : 11 = 21 : 33$$
$$9 : 12 = 15 : 20$$

so ist auch

$$3.7.9 : 5.11.12 = 6.21.15 : 10.33.20$$

oder 189 : 660 = 1890 : 6600

welches leicht in die Augen fällt. Eben so wenn

2 : 4 = 5 : 10

3 : 7 = 15 : 35

9 : 12 = 18 : 24

ist 2. 3. 9 : 4. 7. 12 = 5. 15. 18 : 10. 35. 24

oder 54 : 336 = 1350 : 8400

und so in allen Fällen.

§. 367. Wenn man daher in einer Proporzion

m : n = M : N

in der alle Glieder Zahlen sind, die Glieder so oft durch sich selbst multiplizirt als man will, so sind die daraus entstehenden Zahlen wieder proporzional. Es ist nemlich

m. m : n. n = M. M : N. N

m. m. m : n. n. n. = M. M. M : N. N. N

&c. &c. &c. &c.

Das will sagen, die Quadrate, die Würfel &c. sind ebenfalls proporzional.

§. 368. Wenn auf diese Art die Buchstaben, welche Zahlen bedeuten, oft durch sich selbst mul-

multiplizirt werden sollten, so würde man sie so oft neben einander setzen müssen, als es geschehen soll. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, schreibt man statt

$$m.m \ldots\ldots m^2$$

$$m.m.m \ldots m^3$$

$$m.m.m.m \ldots m^4$$

$$m.m.m.m.m \ldots m^5$$

und zeigt durch die rechter Hand etwas höher geschriebene Zahl an, wie oft die Zahl, neben der sie geschrieben steht, neben einander gesetzt werden, oder wie oft sie durch sich selbst multiplizirt werden soll. Die vorigen Proporzionen würde man daher auch so schreiben können

$$m^2 : n^2 = M^2 : N^2$$

$$m^3 : n^3 = M^3 : N^3$$

$$m^4 : n^4 = M^4 : N^4$$

&c. &c.

§. 369. Es bedeutet also a^2 das Quadrat der Zahl a, a^3 den Würfel von a. Wenn man die Zahlen noch weiter in sich selbst multiplizirt, so nennt man die dadurch entstehenden Produkte Dignitäten oder Potenzen, so daß

a^4 die vierte Dignität oder Potenz

a^5 - fünfte - - - - - -

a^6 - sechste - - - - - -

&c.

und überhaup a^n - nte - - - - - -

wo man alsdenn für n eine Zahl setzen kann welche man will. Diese rechter Hand geschriebenen Zahlen nennt man auch die Exponenten der Dignität.

§. 370. Wenn man eine Zahl a einigemal in sich selbst multiplizirt hat, oder, wie man zu sagen pflegt, zu einer gewissen Dignität erhoben hat, und dividirt sie hernach durch eben dieselbe Zahl a, die man zu einer andern Dignität erhoben hat, so ist der Quotient diejenige Dignität von a, welche entsteht, wenn man von dem Exponenten der Dignität des Dividenden den Exponenten der Dignität des Divisors abzieht.

Es ist nemlich $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$

$$\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$$

und überhaupt $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Dies folgt offenbar aus der angenommenen Art zu schreiben. Denn z. B. in a^7 müste man das

das a 7mal neben einander schreiben und in a^3 dreimal, nemlich

$$a^7 = aaaaaaa$$
$$a^3 = aaa$$

also wäre

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{aaaaaaa}{aaa} = aaaa \cdot \frac{aaa}{aaa} \text{ (§. 254. §. 160.)}$$

Weil nun $\frac{aaa}{aaa} = 1$ ist, so ist offenbar

$$\frac{a^7}{a^3} = a^4$$

und so überhaupt $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

§. 371. Wenn man sich hingegen eine Zahl vorstellt, die eine andere gegebene Zahl A hervorbringt, wenn sie einigemal in sich selbst multiplizirt wird, so nennt man solche die zweite oder Quadrat-, die dritte oder Kubik-Wurzel, oder überhaupt die vierte, fünfte ꝛc. Wurzel aus der Zahl A. Die Wurzel zeigt man durch das Zeichen $\sqrt{}$ an, und die wievielte Wurzel genommen werden soll, durch die Zahl die über dem Zeichen steht; also bedeutet

$\sqrt[2]{A}$ oder blos $\sqrt{A}$ die Quadrat-Wurzel aus A

$\sqrt{}$

$\sqrt[3]{A}$ die Kubik-Wurzel.

$\sqrt[4]{A}$ die vierte Wurzel.

$\sqrt[5]{A}$ die fünfte Wurzel.

2c.

§. 371. Um anzuzeigen, daß eine Verhältniß A : Z aus den Verhältnissen K : L, M : N, P : Q, R : S 2c. zusammen gesetzt werden soll, schreibt man auch, ohne Rücksicht auf die Art der Größen zu nehmen,

$$K.M.P.R\,2c. : L.N.Q.S\,2c. = A : Z$$

oder

$$K \times M \times P \times R\,2c. \; L \times N \times Q \times S\,2c. = A : Z$$

wo das umgelegte x die Multiplikation anzeigt.

Diese Schreibart muß man aber nicht weiter ausdehnen, und z. B. wenn K, L Linien, M, N Flächen, P, Q Körper, R, S Gewichte bedeuten, sich einbilden, daß man Linien durch Linien, Linien durch Flächen, Körper durch Gewichte 2c. multipliziren könne, ob man gleich dies hin und wieder auch so zu sagen pflegt. Dies Multipliziren beziehet sich lediglich auf die Zahlen, durch welche die Entstehung der in den Verhältnissen vorkommenden Größen von einerlei Art angezeigt wird.

§. 372. Es fällt auch leicht in die Augen, daß wenn eine zusammengesetzte Verhältniß so geschrieben ist

K.

K. M. P. R : L. N. Q. S. = A : Z

man solche wieder in diejenigen Verhältnisse zergliedern oder zerlegen können, aus denen sie zusammen gesetzt ist. Nur muß man alsdenn nicht Größen in einer Verhältniß zusammen stellen, die nicht von einerlei Art sind. Z. E. nicht Linien mit Körpern vergleichen, Gewichte mit Flächen ꝛc. sondern nur diejenigen, die von einerlei Art sind. So giebt die Auflösung der vorhergehenden zusammen gesetzten Verhältniß

K : L = A : B,

M : N = B : C

P : Q = C : D

R : S = D : Z.

§. 373. Wenn die Größen K, L, M, N ꝛc. alle Linien bedeuten, und man soll die Verhältniß einer andern Linie A zu der Linie Z aus diesen gegebenen Verhältnissen zusammen setzen, so sucht man erstlich zu K, L und A die vierte Proporzional-Linie B, (§. 303.) hierauf zu M, N und B die vierte Proporzional-Linie C und so weiter, so wird die auf diese Art gefundene letzte Linie Z so beschaffen sein, daß die Verhältniß der Linie A zu Z aus den gegebenen Verhältnissen der Linien K, L, M, N zusammen gesetzt ist.

Sieben

$\sqrt[3]{A}$ die Kubik-Wurzel.

$\sqrt[4]{A}$ die vierte Wurzel.

$\sqrt[5]{A}$ die fünfte Wurzel.

2c.

§. 371. Um anzuzeigen, daß eine Verhältniß A : Z aus den Verhältnissen K : L, M : N, P : Q, R : S 2c. zusammen gesetzt werden soll, schreibt man auch, ohne Rücksicht auf die Art der Größen zu nehmen,

$$K.M.P.R\,2c. : L.N.Q.S\,2c. = A:Z$$

oder

$$K \times M \times P \times R\,2c.\ L \times N \times Q \times S\,2c. = A:Z$$

wo das umgelegte x die Multiplikation anzeigt.

Diese Schreibart muß man aber nicht weiter ausdehnen, und z. B. wenn K, L Linien, M, N Flächen, P, Q Körper, R, S Gewichte bedeuten, sich einbilden, daß man Linien durch Linien, Linien durch Flächen, Körper durch Gewichte 2c. multipliziren könne, ob man gleich dies hin und wieder auch so zu sagen pflegt. Dies Multipliziren bezieht sich lediglich auf die Zahlen, durch welche die Entstehung der in den Verhältnissen vorkommenden Größen von einerlei Art angezeigt wird.

§. 372. Es fällt auch leicht in die Augen, daß wenn eine zusammengesetzte Verhältniß so geschrieben ist

K.

K. M. P. R : L. N. Q. S. = A : Z

man solche wieder in diejenigen Verhältnisse zergliedern oder zerlegen können, aus denen sie zusammen gesetzt ist. Nur muß man alsdenn nicht Größen in einer Verhältniß zusammen stellen, die nicht von einerlei Art sind. Z. E. nicht Linien mit Körpern vergleichen, Gewichte mit Flächen ꝛc. sondern nur diejenigen, die von einerlei Art sind. So giebt die Auflösung der vorhergehenden zusammen gesetzten Verhältniß

K : L = A : B

M : N = B : C

P : Q = C : D

R : S = D : Z.

§. 373. Wenn die Größen K, L, M, N ꝛc. alle Linien bedeuten, und man soll die Verhältniß einer andern Linie A zu der Linie Z aus diesen gegebenen Verhältnissen zusammen setzen, so sucht man erstlich zu K, L und A die vierte Proporzional-Linie B, (§. 303.) hierauf zu M, N und B die vierte Proporzional-Linie C und so weiter, so wird die auf diese Art gefundene letzte Linie Z so beschaffen sein, daß die Verhältniß der Linie A zu Z aus den gegebenen Verhältnissen der Linien K, L, M, N zusammen gesetzt ist.

Sieben

Sieben und dreißigste Stunde.

Vergleichung der Flächen oder des Flächen-Inhalts ebener Figuren.

§. 374.

Fig. 195. Parallelogramme ABCD, abcd, deren Höhen einander gleich sind, verhalten sich wie ihre Grundlinien AB, ab.

Man nehme AE = ab und ziehe EF mit AD oder BC parallel, so ist AEFD ein Parallelogramm und dem Parallelogramme abcd gleich §. 150. Man theile ferner die Grundlinie AB in so viel gleiche Theile als man will, und ziehe durch die Theilungspunkte mit AD Parallel-Linien, so wird das Parallelogramm ABCD in eben so viel gleiche Parallelogramme getheilt.

Fällt nun EF auf eine von diesen Theilungslinien, so sind in dem Parallelogramme AEDF so viel Theile von ABCD als in AE Theile von AB, und es ist offenbar

$$ABCD : AEFD = AB : AE$$

Fällt EF aber nicht auf eine von den Theilungs-Linien, so kann man AB in eine andere Anzahl gleicher Theile theilen, und, wenn man will, diese Anzahl so groß annehmen, daß die Linie EF einer von diesen Theilungslinien so nahe liegt, daß die Entfernung

fernung kleiner ist als eine jede die man sich denken kann. Wie man dies nun auch macht, so enthält AEFD allemal so viel Theile von ABCD als AE Theile von AB, so daß in allen Fällen

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Weil nun AEFD = abcd und AE = ab gleich genommen worden, so ist auch

$$ABCD : abcd = AB : ab.$$

§. 375. Parallellogramme ABCD, abcd, deren Grundlinien AB, ab gleich sind, verhalten sich wie ihre Höhen DE, de.

Man verwandle beide Parallellogramme in die Rectangel ABFG, abfg, welche ihnen ähnlich sind, indem man die Linien AG, BF, ag, bf auf AB, ab perpendikulär aufrichtet und DC, dc verlängert, bis sie dieselben in F, G, f, g durchschneiden, so sind AG, ag die Höhen, und AG = DE, ag = de. Fig. 196.

Weil aber die Rectangel rechtwinklich sind, so kann man auch AB, ab für die Höhen annehmen (§. 149.) und AG, ag für die Grundlinien. Demnach ist

$$ABFG : abfg = AG : ag$$

allein $ABFG = ABCD$

$$abfg = abcd$$

AG = DE

ag = de

Demnach (§. 14. n. 1.) ist auch nach §. 374.

ABCD : abcd = DE : de

§. 376. **Dreiecke die einerlei oder gleiche Höhen haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien; und Dreiecke, die einerlei oder gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie die Höhen.**

Denn wenn sie die Hälften von Parallelogrammen sind, die eben die Grundlinien und Höhen haben, so verhalten sie sich eben so wie diese.

§. 377 **Die Verhältniß zweier Parallelogramme** ABCD, abcd, **deren Grundlinien und Höhen verschieden sind, ist aus der Verhältniß der Grundlinien** AB : ab **und aus der Verhältniß der Höhen** DE : de **zusammen gesetzt.**

Um dies zu beweisen, beschreibe man ein drit-
Fig. 197. tes Parallellogramm FGHK, dessen Höhe der Höhe des Parallellogramms ABCD und dessen Grundlinie der Grundlinie des Parallellogramms abcd gleich sei, so ist nach §. 374

ABCD : FGHK = AB : ab

FGHK : abcd = DE : de (§. 375)

weil

weil FG = ab und DE die Höhe des Parallellogramms FGHK ist. Folglich ist die Verhältniß des Parallellogramms ABCD zu dem Parallellogramm abcd aus den Verhältnissen AB : ab und DE : de zusammen gesetzt.

Dies drückt man nach der angenommenen Art die Verhältnisse zu schreiben, (§. 371.) so aus

$$ABCD : abcd = AB.DE : ab.de$$

welches auch heißt; die Parallelogramme verhalten sich wie die Rectangel aus ihren Grundlinien in ihre Höhen.

§. 378. Die Verhältniß der Dreiecke ist ebenfalls aus den Verhältnissen der Grundlinien und Höhen zusammen gesetzt, weil sie die Hälften der Parallellogramme sind, die einerlei Grundlinien und Höhen haben.

§. 379. Sind demnach die Höhen DE, de den Grundlinien AB, ab umgekehrt genommen proporzional, oder

$$DE : de = ab : AB$$

so sind die Dreiecke oder Parallellogramme einander gleich: Denn in diesem Fall ist

$$ABCD : FGHK = AB : ab$$

$$FGHK : abcd = ab : AB$$

folglich die Verhältniß der Parallelogramme der Verhältniß zweier gleichen Größen, folglich eins dem andern gleich §. 363.

§. 380. Wenn die Parallelogramme oder Dreiecke einander gleich sind, so sind die Höhen den Grundlinien umgekehrt genommen proporzional. Denn wenn man das dritte Fig. 198 Parallelogramm p nennt, so ist

$$ABCD : p = AB : ab$$

$$abcd : p = de : DE$$

oder weil $ABCD = abcd$

auch $$ABCD : p = de : DE$$

Demnach $$AB : ab = de : DE$$

§. 381. Ist ein Quadrat abcd dem Rectangel oder Parallellogramm ABCD gleich, so ist die Seite ab desselben die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Grundlinie und Höhe des Rectangels oder Parallellogramms.

Denn weil bei dem Quadrate alle Seiten gleich sind, folglich die Höhe $de = ad = ab$, so darf man nur in §. 380 ab für de setzen, so wird

$$AB : ab = ab : DE$$

§. 382. Und wenn die Seite des Quadrats die mittlere Proporzional-Linie zwischen

der

der Grundlinie und Höhe eines Rectangels ist, so ist es dem Rectangel gleich.

Dies folgt ebenfalls aus §. 379, wenn man nur ab für de setzt.

§. 383. Soll man ein Quadrat beschreiben, welches einem gegebenen Rectangel oder Parallellogramm gleich sei, so suche man zwischen der Grundlinie und Höhe des Rectangels oder Parallelogramms die mittlere Proporzional Linie (§. 349) und beschreibe darüber ein Quadrat, so ist dies dem Rectangel oder Parallelogramme gleich (§. 382.)

§. 384. Wenn wir den pythagorischen Lehrsatz nicht schon bewiesen hätten, so könnte es hier auf eine kurze und einfache Art geschehen.

Man beschreibe über den Seiten eines rechtwinklichen Dreiecks ABC die Quadrate ABKL, BCEF, ACFG und ziehe von der Spitze C des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Seite AB die Perpendikulär-Linie CH und verlängere sie bis I, so theilt sie das Quadrat der grösten Seite in zwei Rectangel AHIL, BHIK. Fig. 200.

Nun ist BH : BC = BC : AB

oder BH : BC = BC : BK

Folglich das Quadrat über BC dem Rectangel aus AB und BH gleich.

Eben so ist auch AH : AC = AC : AB

oder AH : AC = AC : AL

BCED,

Folglich das Quadrat über AC dem Rectangel aus AH und AL gleich. (§. 382.)

Demnach $BHIK = BCED$

$AHIL = ACFD$

folglich $BHIK + AHIL = BCED + ACFD$ (§. 14. n. 2.)

oder $BC^2 + AC^2 = AB^2$

§. 385. Soll man daher ein Quadrat machen, welches zweien andern gleich sei, so nehme Fig. 200. man die Seiten AC, BC desselben, setze sie unter einem rechten Winkel ACB zusammen, ziehe AB und beschreibe darüber ein Quadrat, so ist es den beiden gegebenen gleich. (§. 384.)

Hätte man mehrere Quadrate und wollte ein Quadrat beschreiben, das allen zusammen gleich sein sollte; so mache man erstlich ein Quadrat, welches zweien davon gleich ist; die gefundene Seite desselben setze man mit der Seite des dritten Quadrats unter einem rechten Winkel zusammen, ziehe die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite, so ist diese die Seite eines Quadrats, welches dreien gleich ist, und so kann man auf ähnliche Art weiter gehn.

§. 386. Soll man aber ein Quadrat machen, welches der Differenz oder dem Unterschiede Fig. 201. zweier Quadrate gleich sei, die über den Seiten AB,

AB, BC beschrieben worden; so beschreibe man über der Seite AB des größten Quadrats einen halben Zirkel, und nehme darin von B bis C die Sehne BC der Seite des über BC beschriebenen Quadrats gleich; ziehe AC, so ist das Quadrat über AC der Differenz oder dem Unterschiede der beiden Quadrate gleich. Denn §. 384 ist

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

folglich $AB^2 - BC^2 = AC^2$

§. 387. Aehnliche Dreiecke ABCD, abcd verhalten sich wie die Quadrate der Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen.

Man ziehe die Linien CD, cd auf die Grund- Fig. linien AB, ab perpendikulär, so sind die Dreiecke 202. ACD, acd einander ähnlich, eben so wie die Dreiecke BCD, bcd. (§. 309.)

und CD : AB = cd : ab

Nun beschreibe man ein Quadrat Q, dessen Seite der Grundlinie AB, und ein anderes q, dessen Seite der Grundlinie b gleich ist.

Weil nun die Dreiecke die Hälften von Parallelogrammen sind, die mit ihnen einerlei Grundlinien und Höhen haben, und die Seiten der Quadrate den Grundlinien gleich sind, so ist §. 375.

$$2\triangle ABC : Q = CD : AB$$

$$2\triangle abc : q = cd : ab$$

Weil aber $CD : AB = cb : ab$ so ist auch

$$2\triangle abc : q = CD : AB.$$

Demnach $2\triangle ABC : Q = 2\triangle abc : q$ (§. 272.)

und $2\triangle ABC : 2\triangle abc = Q : q$

folglich $\triangle BBC : \triangle abc = Q : q$

oder $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$

Da nun auch $AB : ab = AC : ac = BC : bc = CD : cd$, so verhalten sich ähnliche Dreiecke so wie gesagt worden.

§. 388. **Ueberhaupt verhalten sich alle geradelinigte Figuren, die einander ähnlich sind, wie die Quadrate der Seiten, die in beiden zwischen gleichen Winkeln liegen, oder wie die Quadrate der homologen Seiten.**

Denn weil sich ähnliche Figuren in ähnliche Dreiecke zerlegen lassen, und die Verhältniß in der einen Figur zu der Seite, die in der andern Figur auf eben die Art oder zwischen eben den Winkeln liegt, unveränderlich (§. 307.) das will sagen, beständig der Verhältniß $AB : ab$ oder $BC : bc$ ꝛc. gleich ist, so ist

Fig. 174. 175.

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$$

$$\triangle BGH : \triangle bgh = AB^2 : ab^2$$

$$\triangle BCG : \triangle bcg = AB^2 : ab^2$$

&c. &c. &c. &c. §. 387.

und also auch die Verhältniß der Summe aller Dreiecke der ersten Figur zur Summe aller Dreiecke der zweiten Figur der Verhältniß $AB^2 : ab^2$ gleich. Das ist, die erste Figur verhält sich zur zweiten wie das Quadrat der Seite AB zum Quadrate von ab, oder wie das Quadrat einer jeden andern Figur, z. B. EF zum Quadrate der Seite ef, die in der zweiten Figur auf eine ähnliche Art liegt.

§. 389. **Alle in Zirkeln beschriebene Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der Zirkel, in denen sie beschrieben sind.**

Denn sie sind einander ähnlich. (§. 329.)

§. 390. **Da auch ein Zirkel so groß ist als ein Vieleck, das eine unendliche Anzahl Seiten hat, (§. 336) so verhalten sich auch die Zirkel oder die Flächen, welche von den Umkreisen der Zirkel eingeschlossen werden, wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser.**

§. 391. Eben so verhalten sich auch die Ausschnitte aus zweien Zirkeln, deren Winkel an den Mittelpunkten gleich sind, und die Abschnitte, die einander ähnlich sind.

§. 392. Wenn zwei Figuren DEFGH, IKLMN gegeben werden, die einander ähnlich sind, eine Figur zu beschreiben, die beiden gleich und ähnlich ist.

Man nehme zwei Seiten IK, DE, welche in beiden Figuren auf eine ähnliche Art zwischen gleichen Winkeln liegen, und mache AC = IK, BC = DE, setze AC, BC unter einem rechten Winkel zusammen, ziehe AB und beschreibe über AB oder über der größten Seite dieses Dreiecks eine Figur ABQPO, welche den gegebenen ähnlich ist, so ist sie beiden zusammen genommen gleich.

Man setze DEFGH = N

IKLMN = M

ABQPO = P

so ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren

$$IK^2 : DE^2 = M : N$$

oder $AC^2 : BC^2 = M : N$ §. 388.

Folglich auch $AC^2 + BC^2 : BC^2 = M + N : N$ (§. 275.)

Ferner ist wegen der Aehnlichkeit der Figur P mit M und N

$$AB^2 : BC^2 = P : N$$

allein $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (§. 384)

folglich

folglich $AC^2 + BC^2 : BC^2 = P : N$

Demnach $P : N = M + N : N$ (§. 272.)

und daher $P = M + N$.

§ 393. Man kann daher auch einen halben oder ganzen Zirkel beschreiben, der zweien halben Fig. 204. oder ganzen Zirkeln gleich ist, wenn man die Halbmesser oder Durchmesser AC, BC derselben unter einem rechten Winkel zusammensetzt, die dem rechten Winkel gegen über liegende Seite AB zum Halbmesser oder Durchmesser nimmt und darüber einen halben oder ganzen Zirkel beschreibt, weil alle Zirkel einander ähnlich sind.

Acht und dreißigste Stunde.

Berechnung des Flächen-Inhalts.

§. 394.

Wenn wir den Inhalt einer Figur bestimmen wollen, die auf einer Fläche beschrieben worden, so ist unsere Absicht, die Verhältniß zu erfahren,

ren, welche der in dem Umfange der Figur eingeschlossene Raum zu einer andern Fläche hat, die wir als das Maaß oder als die Einheit betrachten. (§. 208.) Zu dieser Einheit kann man nun zwar was für eine Fläche man will annehmen, allein wenn man dabei zugleich auf die Bequemlichkeit im Rechnen sieht, so nimmt man ein Quadrat zur Einheit, und darüber hat man sich stillschweigend überall einverstanden. Diese Fläche, welche als die Einheit betrachtet wird, erhält ihre Benennung von der Länge, welche zur Seite dieses Quadrats angenommen wird. Ist die Seite dieses Quadrats eine Ruthe, so heißt diese Einheit eine Quadratruthe, ist sie ein Fuß, ein Quadratfuß, ist sie ein Zoll, ein Quadratzoll, ist sie eine Linie, eine Quadratlinie, ist sie eine Meile, eine Quadratmeile. Dabei richtet man sich gewöhnlich nach dem in einem Lande angenommenen Fuß-Maaße, davon die vornehmsten in der Tafel §. 216 angegeben worden.

§. 395. Die kleinern Theile dieses Quadrats welches zur Einheit genommen wird, richten sich nach der Eintheilung der Seite desselben. Ist z. B. diese Seite eine Ruthe, die in 12 Fuß eingetheilt wird, so enthält eine Quadratruthe 144 Quadratfuß. Wird der Fuß auch in 12 Zolle getheilt, so enthält ein Quadratfuß 144 Quadratzolle. Wird endlich der Zoll in 12 Linien getheilt, so enthält ein Quadratzoll 144 Quadratlinien u. s. w.

Denn

Denn wenn ABCD ein Quadrat ist, dessen Seite AB eine Ruthe, oder ein Fuß, oder ein Zoll ꝛc. ist, und diese wird in 10 gleiche Theile getheilt, davon AE ein Theil ist, so ist das Quadrat AEGF dem Quadrate ABCD ähnlich.

Folglich ist $ABCD : AEGF = AB^2 : AE^2$ §. 388.

oder $ABCD : AEGF = 10^2\ AE^2 : AE^2$

das ist $ABCD : AEGF = 10^2 : 1^2$

folglich $ABCD = 10^2 . AEGF$.

Ist nun AB = 1 Ruthe = R, AE = 1 Fuß = F

so ist $R = 144\ F^2$.

Ist aber AB = 1 Fuß = F und AE = 1 Zoll = Z

so ist $F^2 = 144\ Z^2$

Ist endlich AB = 1 Zoll = Z und AE = 1 Linie = L

so ist $Z^2 = 144\ L^2$.

Alles dies zeigt auch die Figur sehr deutlich.

§. 396. Bei den Feldmessern ist es durchgängig eingeführt, die in einem Längen-Maaße angenommene Ruthe in 10 Theile oder Dezimalfuße, den Fuß in 10 Dezimalzolle, den Zoll in 10 Dezimal-Linien einzutheilen. Dies erleichtert

leichtert die Berechnung ungemein: denn nunmehr enthält die Quadratruthe 100 Quadratfuß, der Quadratfuß 100 Quadratzolle ꝛc.

§. 397. Wenn man die in verschiedenen Ländern angenommenen Flächen-Maaße mit einander vergleichen will, so muß man die Verhältniß der Seiten derjenigen Quadrate wissen, welche zur Einheit angenommen worden und wie diese weiter in kleinere Theile getheilt werden, und wenn man es nicht weiß, zu bestimmen suchen. Wird bei der Eintheilung der Seiten die Duodezimal-Theilung gebraucht, oder werden die Seiten auf eine gleiche Art eingetheilt, so kann man sich der in der Tafel §. 216 angegebenen Verhältnisse der Fußmaaße bedienen.

Wenn man z. B. wissen wollte, wie sich eine rheinländische Quadratruthe, oder Fuß, oder Zoll ꝛc. zu einer Kalenbergschen Quadratruthe, Fuß oder Zoll ꝛc. verhält, und man nennte die rheinländische Ruthe R, die Kalenberger X, so ist erstlich nach der Tafel:

$$R : X = 13913 : 12916.$$

Denn ob zwar bei der Tafel nur die Verhältniß der Fuße angegeben wird, so verhalten sich doch eben so die Ruthen, weil sowohl die rheinländische als Kalenberger Ruthe 12 Fuß enthält. Weil nun alle Quadrate einander ähnlich sind, so ist (§. 384)

R^2

$$R^2 : K^2 = 13913^2 : 12916^2$$

Folglich die Kalenberger Quadratruthe oder

$$K^2 = \frac{12916^2}{13913^2} \cdot R^2$$

§. 398. Wollte man wissen, wie viel 377 rheinländische Quadratruthen an Leipziger Quadratruthen betragen, so ist nach der Tafel, wenn L die Leipziger Ruthe genannt wird,

$$13913 : 12520 = R : L$$

folglich $\overline{13913^2} : \overline{12520^2} = R^2 : L^2$

Demnach auch nach §. 273

$$13913^2 : 12520^2 = 327\,R^2 : 327\,L^2$$

Folglich

$$327\,R^2 = \frac{13913^2}{12520^2} \cdot 327\,L^2$$

Man darf daher nur nach der Regel de Trisetzen

$$13913^2 : 12520^2 = 327\,R^2 : X$$

so ist das vierte Glied die verlangte Anzahl der Leipziger Quadratruthen, welche 327 rheinländische Quadratruthen betragen.

Eben

Eben so verfährt man in andern Fällen, und wenn man die Quadratfuße, Zolle ꝛc. mit einander vergleichen will.

§. 399. Nachdem wir das Maaß oder die Einheit bestimmt haben, welche bei Messung der Flächen angenommen wird, so wird es leicht sein, alle dabei vorkommende Fragen zu beantworten. Soll man

den Inhalt eines Parallellogramms ABCD finden,

so drücke man die Grundlinie AB und Höhe DE durch Zahlen aus, die sich auf ein gewisses Längen-
Fig. 206. Maaß beziehen, dessen Seite die Seite ab des Quadrats abcd ist, welches zur Einheit genommen wird. (§. 394.) Ist nun AB = b Ruthen, Fußen oder Zollen ꝛc. DE = a Ruthen, Fußen oder Zollen und ab = 1, so ist die Verhältniß des Parallelogramms zu dem Quadrate aus den Verhältnissen b : 1 und a : 1 zusammen gesetzt. Nennt man das Parallelogramm

ABCD, P und das Quadrat abcd, Q so ist

P : Q = ab : 1

Folglich P = ab. Q

Man findet daher den Inhalt eines Parallelogramms, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplizirt.

§.

§. 400. Ist z. B. AB = 5 Ruthen, DE = 3 Ruthen, so ist der Inhalt = 15 Quadratruthen.

Wenn AB = 25, 37 Ruthen, DE = 7, 23 Ruthen nach Dezimal-Maaß, oder AB = 25°, 3′, 7″, DE = 7° 2′, 3″, so ist der Inhalt

183, 4251 Quadratruthen.

oder 183 Quadratruthen + $\frac{42}{100}$ einer Quadratruthe, $\frac{51}{10000}$ einer Quadratruthe.

Da nun nach der Dezimaleintheilung $\frac{1}{100}$ oder 0,01 einer Quadratruthe ein Quadratfuß, $\frac{1}{10000}$ oder 0,0001 einer Quadratruthe ein Quadratzoll ist, §. 396; so ist der Inhalt des Parallelogramms ABCD = 183°, 42′, 51″ Quadratmaaß.

§. 401. Soll man den Inhalt eines Dreiecks ABD finden; Fig. 206.

so drucke man die Grundlinie und Höhe ebenfalls durch Zahlen aus, nemlich man setze AB = b, DE = a, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$ABD = \frac{1}{2} ab. Q$$

oder $$ABD = \frac{1}{2} ab$$

weil das Quadrat Q = 1 ist.

Weil nemlich das Dreieck gerade die Hälfte eines Parallelogramms ist, das mit demselben einerlei Grundlinie und Höhe hat. (§. 150.) so wird der Inhalt

eines Dreiecks gefunden, wenn man die halbe Grundlinie mit der Höhe multipliziret.

§. 402. Soll man den Inhalt eines Vierecks finden, in dem die Seiten AB, CD die einander gegenüber liegen, parallel sind:

so ziehe man BD und die Linie DE, BF auf AB, CD perpendikulär, welche die Höhen der Dreiecke ABD, CDB sind, wo denn DE = BF, weil AB, CD parallel sind. Setzt man nun

Fig. 207.

AB = a, CD = b und DE = BF = d

so ist der Inhalt des Dreiecks ABD = $\frac{1}{2}$ ad

der Inhalt des Dreiecks BCD = $\frac{1}{2}$ bd

Demnach der Inhalt des Vierecks

$$ABCD = \frac{1}{2} ad + \frac{1}{2} bd$$

oder $$ABCD = \frac{1}{2} (a + b) d$$

§. 403. Da eine jede vielseitige Figur in Dreiecke zerlegt werden kann, so ist es nunmehr leicht

den Inhalt einer jeden geradlinigten Figur zu finden.

Man theile die gegebene Figur ABCDE in Dreiecke ABE, BDE, BCD ꝛc. und ziehe die Linien EF, DG, CH auf AB, BE, BD ꝛc. perpen-

Fig. 208.

perpendikulär, so sind dies die Höhen der Dreiecke. Hierauf suche man den Inhalt eines jeden Dreiecks nach §. 400, so ist die Summe der Inhalt der ganzen Figur, welches von selbst in die Augen fällt.

§. 404. Wird der Inhalt eines Parallelogramms in Zahlen gegeben, so findet man die Grundlinie, wenn man diesen Inhalt durch die Zahl dividirt, welche die Höhe ausdruckt, und die Höhe, wenn man den Inhalt durch die Zahl dividirt, welche die Grundlinie ausdruckt.

§. 404. Ist hingegen der Inhalt eines Dreiecks, dessen Höhe a und Grundlinie b, durch die Zahl N gegeben, so ist $N = \frac{a \cdot b}{2}$ (§. 400). Man findet also die Grundlinie, wenn man den doppelten Inhalt durch die Höhe, und die Höhe, wenn man ihn durch die Grundlinie dividirt; weil $b = \frac{2N}{a}$ und $a = \frac{2N}{b}$ ist.

§. 405. Die Differenz zweier Quadrate ist einem Rectangel aus der Summe und der Differenz der Seiten gleich.

Um dies zu beweisen, beschreibe man ein rechtwinkliches Dreieck ADC, so ist Fig. 209.

$$AC^2 - AD^2 = CD^2$$

Man beschreibe nun aus dem Mittelpunkte A mit der größten Seite AC einen Zirkel und verlän-

gere die Grundlinie AD auf beiden Seiten, bis sie den Zirkel in B und F durchschneidet, so ist AF = AC = AB. Demnach

$$FD = AC + AD$$

$$DB = AC - AD$$

Nach den Eigenschaften des Zirkels ist aber

$$FD : CD = CD : BD$$

demnach $AC + AD : CD = CD : AC - AD$.

Folglich CD die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Summe und der Differenz der Seiten der Quadrate.

Demnach ist das Quadrat von CD dem Rectangel aus der Summe und der Differenz der Seiten gleich, §. 382.

Das ist $CD^2 = (AC + AD)(AC - AD)$

oder $AC^2 - AD^2 = (AC + AD)(AC - AD)$

§. 406. Diese Bemerkung giebt ein Mittel an die Hand, den Inhalt eines Dreiecks noch auf eine andere Art zu finden. Ehe ich aber dieß zeige, muß ich noch erinnern, daß wenn man von einer gewissen Größe A die Differenz zweier Größen B und C wegnimmt oder subtrahirt, die daraus entstehende Größe $A - B + C$ ist.

Denn

Denn man setze diese Größe D, so daß

$$A - (B - C) = D$$

sei, so ist offenbar

$$A - (B - C) + B - C = D + B - C \text{ (§. 14)}$$

oder $$A = D + B - C$$

Demnach auch $$A - B = D - C$$

folglich auch $$A - B + C = D - C + C$$

Das will sagen $$A - B + C = D$$

oder $$A - B + C = A - (B - C).$$

§. 407. Soll man nun den Inhalt eines Dreiecks ABC finden, dessen Seiten AB, BC, AC bekannt sind und durch Zahlen ausgedruckt werden:

— so ziehe man die Linie CD auf die Grundlinie perpendikulär, so erhalten wir in den beiden rechtwinklichen Dreiecken ACD, BCD Fig. 21.

$$CD^2 = AC^2 - BD^2$$

$$CD^2 = BC^2 - BD^2$$

das will sagen:

$$BC + BD : CD = CD : BC - BD$$

$$CD : AC + AD = AC - AD : CD$$

Demnach

$BC+BD:AC+AD=AC-AD:BC-BD$
(§. 360 f.)

Folglich nach (§. 371.)

$AC+BC+AD+BD:AC+AD=AC-AD+BC-BD:BC-BD$

oder

$AC+BC+AB:AC+AD=AC+BC-AB:BC-BD$

und

$AC+BC+AB:AC+BC-AB=BC+AD:BC-BD.$

folglich auch

$AC+BC+AB:AC+BC+AB-AC-BC+AB=AC+AD:AC+AD-BC+BD$

Das ist:

1) $AC+BC+AB:2AB=AC+AD:AC+AB-BC.$

Ferner ist

$BC+BD:AC-AD=AC+AD:BC-BD.$

Folglich

Folglich

$BC + BD - AC + AD : AC - AD = AC + AD - BC + BD : BC - BD$

oder

$BC + AB - AC : AC - AD = AC + AB - BC : BC - BD$

und

$BC + AB - AC : AC + AB - BC = AC - AD : BC - BD$

Folglich auch

2) $BC + AB - AC : 2AB = AC - AD : AC + BC - AB$

Setzen wir nun $AB + AC + BC = A$

$AB + AC - BC = B$

$AB + BC - AC = C$

$AC + BC - AB = D$

so erhalten wir

$A : 2AB = AC + AD : B$

$C : 2AB = AC - AD : D$

Demnach

$A.C : 4AB^2 = (AC+AD)(AC-AD) : B.D$
oder nach (§. 405)

$$A.C : 4AB^2 = CD^2 : B.D$$

Demnach nach §. 283.

$$4AB^2 . CD^2 = A.B.C.D$$

Nun ist $4AB^2 . CD^2 = 2.AB.CD . 2AB.CD$

das ist $4AB^2 . CD^2 = (2AB.CD)^2$

Demnach

$$(2AB.CD)^2 = A.B.C.D$$

folglich, wenn man die Quadratwurzel ausziehet,

$$2AB.CD = \sqrt{A.B.C.D}$$

Weil nun AB die Grundlinie und CD die Höhe des Dreiecks ABC ist, so ist $\frac{AB.CD}{2}$ der Inhalt des Dreiecks,

$$\text{oder } \Delta = \frac{AB.CD}{2}$$

wenn wir unter Δ den Inhalt des Dreiecks verstehn.

Demnach $AB.CD = 2\Delta$

und $2AB.CD = 4\Delta$ (§. 14.)

Folg-

Folglich ist

$$4\Delta = \sqrt{A.\ B.\ C.\ D}$$

und der Inhalt des Dreiecks ABC

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{A.\ B.\ C.\ D.}$$

Wenn wir nun für A, B, C, D die ihnen zugehörigen Werthe setzen, so ist nach §. 14. n. 1 der Inhalt des Dreiecks ABC, oder

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-AB)}$$

Setzen wir endlich der Bequemlichkeit wegen

$$AB = a,\ AC = b,\ AB = c$$

so wird

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

§. 408. Aus dieser Auflösung folgt demnach eine neue Regel, den Inhalt eines Dreiecks zu finden, wenn blos die Seiten desselben gegeben werden. Nemlich:

Man drucke die Seiten durch die Zahlen a, b, c aus, und nehme alsdenn

1) die Summe aller Seiten $a+b+c$

2) nehme man nach und nach die Summe zweier Seiten und ziehe davon die dritte

Seite ob, das ist, man suche den Werth von

$$a + b - c$$

$$a + c - b$$

$$b + c - a$$

g) multiplizire man diese Zahlen in einander, ziehe aus dem Produkte die Quadratwurzel und dividire diese gefundene Wurzel durch 4, so bekömmt man den Inhalt des Dreiecks in Zahlen, welche sich auf das Quadrat beziehen, dessen Seite zum Maasse der Seiten des Dreiecks genommen worden.

§. 409. Man pflegt diese Aufgabe alsdenn erst aufzulösen, wenn man die Algebra auf die Geometrie anwendet. Man sieht aber, daß man sie dabei nicht nöthig hat, sondern durch eine geschickte Anwendung der Lehrsätze von den Proportionen eben das weit natürlicher und leichter findet, wozu man oft nicht eher gelangt, als bis man sich mit einem unverdaulichen und beschwerlichen Kalkul herumgetummelt hat. Ich mache diese Bemerkung, um Anfänger aufmerksam zu machen, die so gern bei der geringsten Schwierigkeit gleich ihre Zuflucht zur Algebra nehmen. Diese muß nicht eher gebraucht werden, als bis man mit der Geometrie nicht mehr ausreicht. Wer alle Augenblick und

ihne Noth mit einer algebraischen Auflösung angezogen kömmt, ist sicher ein schlechter Geometer.

Neun und dreißigste Stunde.

Quadratur des Zirkels.

§. 410.

Es ist noch übrig, den Flächeninhalt eines Zirkels zu bestimmen. Dieser ist dem Inhalte eines Dreiecks gleich, dessen Grundlinie der Umkreis (Peripherie) die Höhe aber der Halbmesser des Zirkels ist. (§. 336.) Wir können daher den Inhalt nicht eher finden, als bis wir den Umkreis bestimmt haben; und dieser ist dem Umfange eines regulären Vielecks gleich, das in dem Zirkel beschrieben werden kann und eine unendliche Anzahl Seiten hat. Wir wollen uns nicht in das Unendliche verlieren, sondern nur den Umfang eines Vielecks bestimmen, welches eine sehr große Anzahl Seiten hat, diesen alsdenn für den Umkreis des Zirkels annehmen und uns mit dieser Näherung begnügen, weil sie in allen Fällen zu genau

ferer

serer Absicht hinreichend ist. Die Sache kommt aber darauf an.

§. 411. Wenn die Entfernung der Sehne eines Bogens von dem Mittelpunkte des Zirkels gegeben wird, die Entfernung und Größe der Sehne des halben Bogens vom Mittelpunkte zu bestimmen.

Fig. 411. Es sei BH die Sehne des Bogens BAH und CE die Entfernung derselben vom Mittelpunkte gegeben.

Der Bogen sei in A in zwei gleiche Theile getheilt und AB die Sehne des halben Bogens AB und CF die Entfernung derselben vom Mittelpunkte. Die Frage ist nun, diese durch den Halbmesser AC und die Entfernung CE zu bestimmen.

Zu dem Ende ziehe man die Linie AC durch den Mittelpunkt, und von dem Punkte D, wo sie den Zirkel auf der andern Seite durchschneidet, nach B die Linie DB, und CG auf BD perpendikulär.

Weil nun die Entfernung CF auf AB perpendikulär ist, so theilt sie die Sehne AB und den Winkel ACB in zwei gleiche Theile (§. 174.) Weil nun der Winkel BDA der Hälfte des Winkels BAC, folglich dem Winkel BCF = ACF gleich ist; so sind die Dreiecke CAF, DCG einander gleich, und DG = CF. Und weil CG auch auf DB perpendikulär ist, so ist auch DG = GB, folglich ist DB = 2 DG = 2 CF.

Ferner

Ferner sind die Dreiecke DCG, DBE einander ähnlich, und daher ist

$$DB : DE = DC : DG$$

oder $2\,CF : DC + CE = DC : CF$,

oder $DC : CF = 2\,CF : DC + CE$,

oder 1) $AC : CF = CF : \frac{AC + CE}{2}$.

Es ist also die Entfernung CF die mittlere Proporzional-Linie zwischen dem Halbmesser und der halben Summe des Halbmessers und der Entfernung der Sehne des ganzen Bogens vom Mittelpunkte.

§. 412. Ferner sind auch die Dreiecke ACF, ABE einander ähnlich, und daher ist

$$AE : AF = AB : AC$$

oder $AE : AF = 2\,AF : AC$

oder auch umgekehrt

$$AC : 2\,AF = AF : AE$$

das ist $AC : AF = AF : \frac{1}{2}\,AE$

oder da $AE = AC - CE$

2) $AC : AF = AF : \frac{AC - CE}{2}$

Das

Das will sagen, die Hälfte der Sehne AB des halben Bogens ist die mittlere Proporzional Linie zwischen dem Halbmesser und der halben Differenz des Halbmessers und der Entfernung des ganzen Bogens vom Mittelpunkte.

§. 413. Wenn daher diese Linien durch Zahlen gegeben werden, so findet man die Sehne AB und Entfernung CF, wenn man die Quadratwurzel ausziehet.

$$\text{Weil } CF^2 = AC\,\frac{(AC + CE)}{2}$$

$$AF^2 = \tfrac{1}{4}AB^2 = AC\,\frac{(AC - CE)}{2}$$

$$\text{folglich } CF = \sqrt{AC\,\frac{(AC + CE)}{2}}$$

$$AF = \tfrac{1}{2}AB = \sqrt{AC\,\frac{(AC - CE)}{2}}$$

§. 414. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir den Halbmesser $AC = 1$ setzen, so wird die Entfernung CE allezeit eine Zahl sein die kleiner ist als 1, und wir haben

$$\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{\frac{(1 - CE)}{2}}$$

CF

$$CF = \sqrt{\frac{(1 + CE)}{2}}$$

§. 415. Wenn wir AB als einen ganzen Bogen betrachten, so können wir auf eben diese Art die Entfernung der Sehne des halben Bogens vom Mittelpunkte und die Größe derselben finden. Demnach leicht für alle Bogen

$$\frac{1}{2}A,\ \frac{1}{4}A,\ \frac{1}{8}A,\ \frac{1}{16}A\ \text{ꝛc.}$$

§. 416. Wir wollen nunmehr annehmen, der Bogen BAH sei der dritte Theil eines Zirkels, so wird AB der sechste Theil des Zirkels sein. Nennt man nun den halben Umkreis des Zirkels π, so ist der ganze Umkreis des Zirkels 2π, folglich der Bogen $BAH = \frac{2}{3}\pi$, $AB = \frac{2\pi}{6}$

oder der Bogen $AB = \frac{1}{3}\pi$

und der Winkel $ACB = 60^0$

Weil nun alle Winkel eines Dreiecks 180^0 machen, so ist in dem Dreiecke ABC jeder Winkel 60^0, folglich das Dreieck ABC ein gleichseitiges. Demnach theilt BE die Seite AC oder den Halbmesser in zwei gleiche Theile,

oder es ist $CE = AE = \frac{1}{2}AC$

Weil nun $AC = 1$, so ist $CE = \frac{1}{2} = 0,5$

§. 417. Wenn daher

für $\frac{1}{3}\pi$ die Entfernung $CE = 0,5$

so

so ist für

$\frac{1}{3}\pi$ die Entfernung $CF = \sqrt{\frac{3,5}{4}}$

oder $CF = \sqrt{0,75}$

und wenn man die Quadratwurzel ausziehet

$CF = 0,866025403784$

Fährt man eben so weiter fort, so ist

ehe $\frac{1}{6}\pi \ldots CF^{I} = 0,965925826425$

$\frac{1}{12}\pi \ldots CF^{II} = 0,991444881586$

$\frac{1}{24}\pi \ldots CF^{III} = 0,997858928445$

$\frac{1}{48}\pi \ldots CF^{IV} = 0,999464588778$

$\frac{1}{96}\pi \ldots CF^{V} = 0,999866138235$

$\frac{1}{192}\pi \ldots CF^{VI} = 0,999966533987$

$\frac{1}{384}\pi \ldots CF^{VII} = 0,999991633436$

§. 412. Wir finden nunmehr die Hälfte der Sehne der Hälfte des Bogens $\frac{1}{384}\pi$, wenn wir aus der Hälfte der Differenz des Halbmessers 1 und CF^{VII} die Quadratwurzel ziehen. Geschieht dies, so ist die halbe Sehne

des Bogens $\frac{1}{768}\pi = 0,002045307$

und

und die ganze Sehne = 0,0040906142

Wird diese durch 768 multiplizirt, so erhalten wir π oder die halbe Peripherie des Zirkels

$$\pi = 3,1415915 \text{ ꝛc.}$$

wo die ersten 6 Ziffern richtig sind.

Wollte man sie genauer haben, so dürfte man nur die Theilung des Bogens weiter fortsetzen. Verschiedene Geometer haben dies gethan, und besonders Ludolf von Ceulen, oder vielmehr Ludolf von Koeln, und gefunden, daß wenn der Halbmesser = 1 angenommen wird, der halbe Umkreis, oder

$$\pi = 3,141592653589793238462643 \text{ ꝛc.}$$

oder wenn der Durchmesser = 1 gesetzt wird, der ganze Umkreis durch eben diese Zahl ausgedruckt wird. Euler und andere sind noch weiter gegangen.

§. 419. Nachdem wir den halben Umkreis eines Zirkels gefunden haben, dessen Halbmesser 1 ist, so ist es leicht

den halben Umkreis eines jeden Zirkels zu finden, dessen Halbmesser gegeben wird.

Denn wir haben gesehen, daß alle Zirkel einander ähnlich sind, und daß sich folglich die halben und ganzen Umkreise verhalten wie die Halbmesser. (§. 331.) Ist demnach der Halbmesser eines

gegebenen Zirkels r und der halbe Umkreis, den man sucht, wird p gesetzt, so ist

$$1 : r = \pi : p$$

folglich der halbe Umkreis oder

$$p = \pi . r$$

folglich der ganze Umkreis oder

$$2p = 2\pi r = \pi . 2r$$

Weil nun der Durchmesser $= 2r$, so wird der ganze Umkreis oder

$$2p = \pi\delta$$

wenn der Durchmesser des gegebenen Zirkels δ angenommen wird.

§. 420. Eben so leicht ist es auch

den Inhalt eines gegebenen Zirkels zu finden.

Denn die Fläche des Zirkels oder der Inhalt ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Umkreis und Höhe der Halbmesser. (§. 336.) Man findet dieses also, wenn man die halbe Grundlinie, das will sagen, den halben Umkreis des gegebenen Zirkels durch den Halbmesser multiplizirt. (§. 400.) Ist nun r der Halbmesser des gegebenen Zirkels, so ist der halbe Umkreis desselben πr. (§. 419.) Demnach

der

der Inhalt des Zirkels $= \pi rr$

Wird hingegen der Durchmesser δ des Zirkels gegeben, so wird $r = \frac{1}{2}\delta$. Demnach ist auch der Inhalt

$$\frac{1}{4}\pi\delta\delta$$

durch den Durchmesser ausgedruckt.

In allen diesen ist $\pi = 3,14159$ ꝛc. und es ist genug, wenn man nur die ersten drei Zahlen gebraucht.

§. 421. Gesetzt zum Beispiel der Durchmesser des Zirkels wäre 26 Ruthen, so ist der Halbmesser $r = 13$ Ruthen, folglich der halbe Umkreis.

$$p = 13 \cdot 3,14159$$

das ist $p = 40,84067$ Ruthen

und der Inhalt $= \pi rr = 530,92871$ Quadratruthen, und so in allen Fällen.

Vierzigste Stunde.

Vorbereitung zum Aufnehmen oder zur Vermessung einer Gegend und ganzer Länder.

§. 422.

Wenn eine Gegend oder ein ganzes Land eine vollkommen geometrische Ebene wäre, so würde man sowohl mit Hülfe der oben beschriebenen Werkzeuge als auch ohne dieselben im Stande sein, durch eine geschickte Anwendung der bisher vorgetragenen Lehrsätze die Verhältniß der Entfernungen aller darauf befindlichen Gegenstände oder Punkte und dadurch ihre Lage gegen einander zu bestimmen; das will sagen, man würde die Gegend oder das Land aufnehmen und auf dem Papiere ein Bild, welches demselben vollkommen ähnlich wäre, entwerfen, oder eine Karte davon zeichnen können. Allein dergleichen Ebenen findet man nicht in der Natur, und die Oberfläche der Erde wechselt mit Bergen und Gründen, Thälern und Hügeln ab. Es werden daher noch mehrere Kenntnisse zum Aufnehmen erfordert, und ein Feldmesser, der in der Mechanik, Optik und Astronomie ein Fremdling ist, wird nicht leicht etwas mit der gehörigen Genauigkeit leisten können. Indeß giebt es einige Fälle, wo man sich theils

geome

geometrische Ebenen in Gedanken vorstellen kann, theils eine Fläche findet, welche man ohne beträchtlichen Fehler für eine geometrische Ebene annehmen kann, und oft selbst genöthigt ist, sie als eine solche zu betrachten. Von diesen Fällen wollen wir nun einige betrachten, diejenigen Aufgaben durchgehen, welche auf sie Bezug haben, und uns dabei anfänglich so wenig Werkzeuge als möglich und daher nur

der Meßkette, Meßschnur und Stäbe

bedienen. Daher muß man sich mit einigen Meßstäben versehen, die 10 Fuß lang, so gerade als möglich, und an dem einen Ende zugespitzt sind, damit man sie leicht in die Erde stecken kann.

§. 423. Auf einer geraden Linie AB auf dem Felde bei dem Punkte A einen Winkel BAC zu finden, der einem andern Winkel bac auf dem Felde gleich sei. Fig. 50.

1) Man nehme auf den Schenkeln des gegebenen Winkels bac die Punkte d, e an, und messe mit der Kette oder Schnur die Linien ad, ae, de.

2) Auf der mit Stäben ausgesteckten oder auf eine andere Art bezeichneten geraden Linie AB trage man von A bis D die Länge der Linie ad und stecke in D einen Stab.

3) Man nehme auf der Kette oder Schnur von dem einen Ende derselben gegen das andere

herauf die Länge der Linie ac, und von diesem Punkte weiter gegen das andere Ende zu die Länge der Linie cd.

4) Hierauf halte man das erste Ende der Kette oder Schnur an dem Punkte A, und den Punkt, wo die Linie cd aufhört, an dem Punkte D fest. Nehme den Punkt e, wo die Länge der Linie ac auf der Kette oder Schnur hinfällt, halte ihn fest, ziehe die Kette oder Schnur an, damit sie gerade werde, und stecke alsdenn in den Punkt E einen Stab.

So ist der Winkel BAC dem Winkel bac gleich. (§. 54.)

§. 424. Durch einen Punkt C auf dem Felde eine gerade Linie zu ziehen, welche mit einer gegebenen geraden Linie MN parallel sei. Fig. 219.

1) Man nehme auf der Linie MN zwei Punkte A und B, messe AB, die Entfernung derselben, und setze in A einen Meßstab.

2) Man messe die Entfernung CB, theile sie in D in zwei gleiche Theile, setze in D einen Meßstab und messe die Länge der Linie AD.

3) Hierauf verlängere man die Linie AD, mache DE = AD, und setze in E einen Stab.

So wird die Linie CE, die man auf beiden Seiten so weit verlängern kann als man will, mit AB oder mit MN parallel sein.

Denn

4. Denn weil CD = BD; DE = AD und der Winkel CDE = ADB (§. 27.) so ist auch der Winkel CED = DAB (§. 48.) folglich CE mit AB parallel. (§. 106.)

§. 425. Auf dem Felde eine gerade Linie zu ziehen, welche mit einer Linie MN, die durch die Punkte M, N geht, parallel sei, wenn man zu keinem von diesen Punkten kommen kann.

1) Man nehme einen Punkt A an, wo man will, stecke in denselben einen Meßstab und in zwei andere Punkten B und C, welche in den Linien AN, AM liegen, ebenfalls Meßstäbe. Fig. 216.

2) Man messe die Linien AB, AC, BC mit der Kette oder Schnur, und verlängere BC, auf beiden Seiten gegen D und F.

3) Man mache BE = AB; CG = AC, und auf der verlängerten Linie BC nehme man ebenfalls BD = BC; CF = BC und setze in alle diese Punkte D, E, F, G Meßstäbe, damit sie sichtbar werden.

4) Hierauf verlängere man die Linie ED rückwärts gegen H, und gehe auf derselben so lange fort, bis man bei H sieht, daß man mit dem Punkte B und dem Gegenstande M in gerader Linie ist: Sodann setze man in H einen Stab, und messe die Länge der Linie EH.

5) Man verlängere die Linie GF ebenfalls rückwärts gegen K, und gehe auf derselben so lange fort, bis man in K sieht, daß man mit dem Punkte C und dem Gegenstande N in gerader Linie ist, stecke in K wieder einen Stab und messe die Länge der Linie GK.

6) Nachdem man die Linien EH, GK gefunden, verlängere AM, AN rückwärts gegen I und L, und mache AI = EH, AL = IK, setze in I und L Stäbe,

so ist die Linie LI mit MN parallel.

Denn weil BE = AB; BD = BC, CG = AC, CF = BC, der Winkel EBD = ABC, der Winkel FCG = ACB: so sind auch die Winkel BED = BAM, CGF = CAN folglich die Linie ED und daher auch EH mit AC oder AM, GF und daher auch GK mit AB oder AN parallel (§. 106.)

Weil ferner AB = BE und MAB = BEH, (§. 27) BEH = MAB, so ist auch EH = AM (§. 58.) und eben so wird bewiesen, daß GK = AN ist.

Es ist daher auch AI = AM und AL = AN, (n. 6.) folglich sind die Dreiecke LAI, MAN einander gleich (§. 27 und 48) und der Winkel AMN = AIL. Folglich LI mit MN parallel.

§. 426. Dies aber setzt voraus, daß man ungehindert so weit rückwärts gehen kann als man will.

will. Geht dies nicht an; so mache man anfänglich alles so wie n. 1. 2, nehme hernach aber

$Be = \frac{1}{2}AB$ oder $= \frac{1}{3}AB$ oder $= \frac{1}{4}AB$ ꝛc.

$Bd = \frac{1}{2}BC$ oder $= \frac{1}{3}BC$ . . $= \frac{1}{4}BC$ ꝛc.

$Cg = \frac{1}{2}AC$ . . $= \frac{1}{3}AC$ . . $= \frac{1}{4}AC$ ꝛc.

$Cf = \frac{1}{2}BC$ . . $= \frac{1}{3}BC$ . . $= \frac{1}{4}BC$ ꝛc.

und stecke in die Punkte e, d, g, f Stäbe.

Man verlängere ferner ed, gf rückwärts, bis man sieht, daß die Punkte h, k mit M, und B, N und C in gerader Linie sind, und messe hernach die Linien eh, gk.

Hierauf verlängere man MA, NA rückwärts bis i und k, und mache $Ai = eh$, $Al = gk$, stecke in i und l stäbe; so ist die Linie li auch mit MN parallel.

Denn weil Be, Bd, Cg, Cf gleiche Theile von $BE = AB$, $BD = BC$, $CG = AC$, $BF = BC$ enthalten, so ist $Be : Bd = BE : BD$ und $Cg : Cf = CG : CF$, folglich die Dreiecke Bed, BED einander ähnlich; eben so auch die Dreiecke Cfg, CFG. Demnach ed mit ED, folglich auch mit EH oder AM parallel, und eben so gf mit GF oder AM parallel. Daher ist auch eh mit AM und gk mit AN parallel,

parallel, weil sie die verlängerten Linien ed, fg sind.

Die Dreiecke Beh, BEH sind also auch einander ähnlich, und eben so die Dreiecke Cgk, CGK. Folglich ist

Be : BE = eh : EH

Cg : CG = gk : GK

oder Be : BE = eh : AM

Cg : CG = gk : AN §. 425

Gleichwie wenn Be = $\frac{1}{n}$ BE; Cg = $\frac{1}{n}$ CG so ist auch

eh = $\frac{1}{n}$ AM; gk = $\frac{1}{n}$ AN.

Demnach auch Al = $\frac{1}{n}$ AN; AC = $\frac{1}{n}$ AM.

Weil nun $\frac{1}{n}$ AN : $\frac{1}{n}$ AM = AN : AM

so ist auch Al : Ai = AN : AM

Demnach sind die Dreiecke MAN, lAi einander ähnlich, und daher li mit MN parallel.

§. 427. Sollte man durch den Punkt A eine gerade Linie ziehen, welche mit MN parallel wäre, so verfähret man so wie §. 425 oder 426, und zieht hernach durch A eine gerade Linie mit LI oder li parallel, nach Anleitung des §. 424.

§.

§. 428. Bei der wirklichen Anwendung dieser Auflösung auf dem Felde muß man die Linie AB, AC nicht zu klein annehmen, denn sonst vergrößern sich die Fehler, die bei Messung der Linie Ae, Bd, eh, Cf, Cg, gk begangen werden, in der Verhältniß von Be : AB; Cg : AC.

Man muß ferner die Linien AB, AC, BC, Be, Bd, Cf, Cg sehr genau messen, wenn man die Entfernung MN sehr genau haben will. Dies ist nun auf dem Felde etwas schwer, daher man auch keine vollkommen geometrische Genauigkeit erwarten kann. Ich bemerke dies, damit man nicht Fehler auf Rechnung der Geometrie setze, die entweder wegen Unvollkommenheit der Werkzeuge unvermeidlich, oder Folgen einer gewissen Nachlässigkeit sind, die sich mit der geometrischen Schärfe nicht verträgt.

§. 429. Die Entfernung zweier Punkte oder Gegenstände B und C zu finden, wenn man zwar zu beiden aber nicht von einem zum andern in gerader Linie kommen kann.

Wir haben diese Aufgabe bereits aufgelöst; dabei aber wurde angenommen, daß man rückwärts so weit fortgehen konnte als es nöthig war. Kann dies aber nicht geschehen, so messe man die Linien AB, AC und nehme alsdenn auf den Linien AB, AC gegen B und C zu oder rückwärts Fig. 212.

AD $= \frac{1}{2}$ AB oder $= \frac{1}{3}$ AB oder überhaupt $= \frac{1}{n}$ AB

AE

$AE = \frac{1}{2}AC$ oder $= \frac{1}{3}AC$ oder $= \frac{1}{n}AC$

bezeichne die Punkte D, E mit Stäben und messe die Linie DE, so findet man BC durch eine von diesen Proporzionen

$$AD : AB = DE : BC$$

$$AE : AC = DE : BC$$

weil die Dreiecke EAD, BAC ähnlich sind.

§. 430. **Die Entfernung eines Punkts oder Gegenstandes C, zu dem man nicht kommen kann, von zweien andern Punkten A und B zu bestimmen.**

1) Man nehme auf der Linie BC, die man auch verlängern kann, wenn es die Gegend erlaubt, einen Punkt D an, und messe die Linien AB, BD, AD.

Fig. 213. a

2) Man mache $AF = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ etc. oder $\frac{1}{n}AB$ und eben so $AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}AD$ und setze in E und F Stäbe, damit die Linie FE gehörig bezeichnet werde, und messe FE.

3) Man verlängere EF gegen C und suche auf dieser Linie den Punkt G, der mit den Punkten A und C in gerader Linie liegt, und messe GF, AG.

So findet man die Entfernung des Punkts C von B und A durch die Proporzionen

AF

$$AF : FG = AB : BC$$

$$AF : AG = AB : AC$$

Denn weil $AF = \frac{x}{m} AB$, $AE = \frac{x}{n} AD$

nun $\frac{x}{n} AB : \frac{x}{n} AD = AB : AD$

oder $AF : AE = AB : AD$

so ist FE und daher auch EG mit BD oder BC parallel, und die Dreiecke AFG, ABC sind ähnlich. Hieraus folgt das übrige von selbst.

§. 431. Es kommt hierbei alles darauf an, durch einen Punkt F auf der Linie AB mit BC eine Parallel-Linie zu ziehen. Dies kann man durch Hülfe eines rechten Winkels bewerkstelligen, den ich vorzüglich wähle, weil man ihn am leichtesten und sogar durch das bloße Augenmaaß ziemlich genau abstecken kann.

Man nehme also bei B auf der Linie AB einen Punkt E an, richte ED auf AB perpendikulär auf, verlängere sie so weit es nöthig ist, suche in der Linie BC den Punkt D, wo sie die Linie BC durchschneidet, und messe hierauf die Linien BE, ED. Fig. 213. b

Ist dies geschehen, so nehme man auf der Linie AB wo man will einen Punkt F an, mache FH = BE, richte in H ebenfalls auf AB die Perpendikulärlinie HG auf, mache HG = ED und setze in F, G Stäbe, um die Linie FG gehörig zu bezeichnen.

Hier,

Hierauf verlängere man die Linie FG und suche auf derselben einen Punkt K, der mit den Punkten A und C in gerader Linie ist, und messe die Längen der Linien FK, AF, AK, so findet man BC und AC durch die Proporzionen

$$AF : FK = AB : BC$$

$$AF : AK = AB : AC.$$

Denn weil die Dreiecke HFG, EBD gleich gemacht worden, so ist der Winkel HFG oder AFK dem Winkel EBD oder ABC gleich, folglich FK mit BC parallel (§. 105) und die Dreiecke AFK, ABC ähnlich, folglich ꝛc.

§. 431. Dieses Verfahrens kann man sich bedienen, wenn man die Breite eines Flusses finden will. Ueberhaupt aber kömmt diese Frage besonders im Felde häufig vor. Wenn man aber die Linie AB in Verhältniß mit der Entfernung BC sehr klein nimmt, so kann man große Fehler begehn. Um diese zu vermeiden, muß man AB so annehmen, daß sie ohngefähr $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ ꝛc. oder aufs Höchste $\frac{1}{8}$ der Linie BC ist, und dies durch das Auge beurtheilen. Diese Vorsicht muß man in allen Fällen gebrauchen.

§. 432. Die Entfernung zweier Punkte oder Gegenstände B, C zu bestimmen, wenn man zwar zu keinem von beiden kommen, sich aber doch mit ihnen in gerader Linie setzen kann.

1) Man nehme in der Verlängerung der Linie BC einen Punkt D an, und bezeichne ihn mit einem Stabe. Fig. 214.

2) Man ziehe oder stecke die Linie DA auf dem Felde ab und messe ihre Länge.

3) Hierauf ziehe man durch einen Punkt E in der Linie AB die Linie EG parallel mit DC, nach Anleitung des §. 431, und bezeichne die Punkte F, G in derselben, welche mit dem Punkte A und den Gegenständen B, C in gerader Linie liegen.

4) Man messe die Linien AE, AF, AG, FE, FG, so bekömmt man die Entfernung BC der Gegenstände und auch ihre Entfernung von D und A durch die Proporzionen.

$$AE : AD = FG : BC$$

$$AE : AD = EF : DB$$

$$AE : AD = EG : DC$$

$$AE : AD = AF : AB$$

$$AE : AD = AG : AC,$$

weil die Dreiecke AEF und ADB, AEG und ADC, AFG und ABC ähnlich sind.

§. 433. Kann man die Linie DA so ziehen, daß sie auf DC perpendikulär und daher CDA ein rechter Winkel ist; so erleichtert man sich die Arbeit, weil man alsdenn nur nöthig hat, bei E einen rechten Winkel abzustecken.

§.

§. 434. Die Entfernung zweier Gegenstände C, D zu bestimmen, wenn man zu keinem von beiden kommen und sich auch nicht mit ihnen in gerader Linie setzen kann.

Fig. 227.

Dies geschieht am leichtesten auf folgende Art.

1) Man nehme nach Gefallen eine Linie AB an, die so gezogen sein muß, daß man die Punkte oder Gegenstände in den äußersten Punkten A, B sehen kann, bezeichne die Punkte A und B durch Stäbe und messe sie.

2) Durch einen willkührlich angenommenen Punkt E in der Linie AB ziehe man EG mit BD und EF mit BC parallel nach Anleitung des §. 424, oder in dem man bei E, so wie §. 231 gezeigt worden, die Winkel AEG, AEF absteckt, welche den Winkeln ABD, ABC gleich sind.

3) Man suche auf der Verlängerung der Linie EF, EG die Punkte F und G, welche mit A und C, A und D in gerader Linie liegen, bezeichne sie mit Stäben und messe die Längen der Linien AE, EF, AG, GF.

So bekömmt man die Entfernung CD durch die Proporzion.

$$AE : AB = FG : CD$$

Denn weil EF mit BC, EG mit BD parallel sind, so sind die Dreiecke AEF und ABC, AEG und ABD ähnlich, folglich ist

AE

$$AE : AB = AF : AC$$

$$AE : AB = AG : AD$$

Demnach $AF : AC = AG : AD$

folglich GF und DC parallel.

Daher denn auch

$$AF : AC = GF : CD$$

oder $AE : AB = FG : CD$

Z. B.

Gesetzt AB wäre 385 Ruthen und man hätte

$$AE = 40$$

$$AG = 30$$

$$GF = 73$$

$$EF = 61$$

Ruthen lang gefunden, so wäre

$$40 : 73 = 385 : CD$$

folglich $CD = 702,628$ Ruthen

oder $CD = 702\frac{5}{8}$ Ruthen

$CD = 702$ Ruthen 7 Fuß 6 Zoll

§. 435. Auch bei dieser Aufgabe muß ich erinnern, daß man die Linie AB, die man auch die Standlinie nennt, nicht zu klein annehme, weil man sonst Gefahr läuft, Fehler und oft große Fehler zu begehn.

Das Ausstecken der Linien ist im Felde oft auch mit vielen Schwierigkeiten verbunden. Wenn es also angeht, muß man die Standlinie AB durch zwei deutlich in die Augen fallende Gegenstände ziehn, z. B. zwei hohe Berge, zwei Türme, zwei Windmühlen, zwei Bäume, die man weit sehen kann ꝛc. Denn zwischen diesen Gegenständen kann man sich allezeit in gerader Linie setzen, und sich auch leicht wieder finden, wenn man sie verlohren hat.

Ein und vierzigste Stunde.

Auflösung eben dieser Aufgaben durch Werkzeuge.

§. 436.

Wenn man mit einem Werkzeuge zum Winkelmessen versehen ist, es sei ein Astrolabium oder

oder eine Bussole, so lassen sich diese Aufgaben mit weniger Mühe auflösen.

Kann man von dem Punkte B nicht in gerader Linie zu dem Punkte C kommen, und man will die Entfernung BC wissen; 2

so nehme man 1) nach Gefallen einen Punkt A an, wo man beide Gegenstände bei B und C sehen kann, und messe die Linien AB, AC mit der Meßkette oder Schnur. Fig. 212.

2) Man messe bei A mit dem Instrument den Winkel BAC (§. 253. f.) und wenn dies geschehen, so bringe man

3) den gemessenen Winkel nach Gräden und Minuten durch Hülfe des Transporteurs auf das Papier, mache sich

4) einen verjüngten Maaßstaab, und trage von demselben auf die Schenkel des beschriebenen Winkels von A aus die Längen der Linien AB, AC.

So zeigt die Entfernung der Punkte B und C auf dem Papiere nach dem verjüngten Maaßstaabe die Entfernung eben dieser Punkte auf dem Felde. Weil das auf dem Papiere beschriebene Dreyeck ABC dem wirklichen auf dem Felde ähnlich ist.

§. 437. Soll man die Entfernung eines Punktes oder Gegenstandes C, zu dem man nicht kommen kann, von dem Punkte A bestimmen; so nehme man

§. 435. Auch bei dieser Aufgabe muß ich erinnern, daß man die Linie AB, die man auch die Standlinie nennt, nicht zu klein annehme, weil man sonst Gefahr läuft, Fehler und oft große Fehler zu begehn.

Das Ausstecken der Linien ist im Felde oft auch mit vielen Schwierigkeiten verbunden. Wenn es also angeht, muß man die Standlinie AB durch zwei deutlich in die Augen fallende Gegenstände ziehn, z. B. zwei hohe Berge, zwei Türme, zwei Windmühlen, zwei Bäume, die man weit sehen kann ꝛc. Denn zwischen diesen Gegenständen kann man sich allezeit in gerader Linie setzen, und sich auch leicht wieder finden, wenn man sie verlohren hat.

Ein und vierzigste Stunde.

Auflösung eben dieser Aufgaben durch Werkzeuge.

§. 436.

Wenn man mit einem Werkzeuge zum Winkelmessen versehen ist, es sei ein Astrolabium oder

oder eine Bußole, so lassen sich diese Aufgaben mit weniger Mühe auflösen.

Kann man von dem Punkte B nicht in gerader Linie zu dem Punkte C kommen, und man will die Entfernung BC wissen;

so nehme man 1) nach Gefallen einen Punkt A an, wo man beide Gegenstände bei B und C sehen kann, und messe die Linien AB, AC mit der Meßkette oder Schnur. Fig. 212.

2) Man messe bei A mit dem Instrument den Winkel BAC (§. 233. f.) und wenn dies geschehen, so bringe man

3) den gemessenen Winkel nach Graden und Minuten durch Hülfe des Transporteurs auf das Papier, mache sich

4) einen verjüngten Maaßstaab, und trage von demselben auf die Schenkel des beschriebenen Winkels von A aus die Längen der Linien AB, AC.

So zeigt die Entfernung der Punkte B und C auf dem Papiere nach dem verjüngten Maaßstaabe die Entfernung eben dieser Punkte auf dem Felde, weil das auf dem Papiere beschriebene Dreyeck ABC dem wirklichen auf dem Felde ähnlich ist.

§. 437. **Soll man die Entfernung eines Punktes oder Gegenstandes C, zu dem man nicht kommen kann, von dem Punkte A bestimmen;** so nehme man

1) eine gerade Linie AB zur Standlinie an, ſtecke ſie, wenns nöthig iſt, mit Stäben aus und meſſe ſie mit der Meßkette oder Meßſchnur. Fig. 213.

2) Bei A meſſe man den Winkel CAB mit dem Aſtrolabium oder mit der Bußole. (§. 233. f.)

3) Man gehe hierauf nach dem Punkte B und meſſe daſelbſt ebenfalls den Winkel ABC.

4) Hierauf ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie AB und gebe ihr nach dem verjüngten Maasſtaabe die Länge, welche man auf dem Felde gefunden.

5) Bei den Punkten A und B beſchreibe man auf der Linie AB die Winkel BAC, ABC durch Hülfe des Transperteurs, (§. 232.) ſo beſtimmt

6) der Punkt C, wo ſich die Schenkel dieſer Winkel durchſchneiden, die Entfernung des Gegenſtandes C auf dem Felde von dem Punkte A und B nach dem verjüngten Maasſtaabe.

Denn das auf dem Papier beſchriebene Dreieck iſt dem auf dem Felde ähnlich.

Z. B.

§. 438. Wenn AB = 213 Ruthen, der Winkel BAC = 63° 30′ ABC = 47° 15′ ſo findet man

AC

AC = 168, 84 Ruthen

BC = 204, 88

oder AC = 168° 8′ 4″

BC = 204° 3′ 8″

nach Dezimal-Maaß.

§. 439. Soll man die Entfernung zweier Punkte oder Gegenstände C, D bestimmen, zu denen man nicht kommen kann; so nehme man

1) auf dem Felde eine Standlinie AB an, stecke sie mit Meßstäben aus und messe sie.

2) In dem äußersten Punkte A dieser Linie messe man mit dem Astrolabium oder Bußole die Winkel DAB, CAB, in dem Punkte B die Winkel BAC, ABD und merke ihre Größe nach Graden und Minuten. (§. 235. 236.)

3) Hierauf ziehe man auf dem Papiere eine gerade Linie AB und gebe ihr die gehörige Länge nach dem verjüngten Maasstaabe. Fig. 218.

4) Bei A und B trage man die Winkel DAB, CAB, ABC, ABC an die Linie AB durch Hülfe des Transporteurs auf (§. 232.) und ziehe die Schenkel derselben mit Bleistift oder der Reißfeder aus.

So bestimmt der Durchschnittspunkt D der Schenkel der Winkel DAB, ABD die Lage des Gegenstandes auf dem Felde, und der Durchschnittspunkt der Schenkel der Winkel BAC, ABC den Gegenstand oder Punkt C auf dem Felde. Mißt man nun die Entfernung der Punkte C, D auf dem Papier nach dem verjüngten Maasstaabe, so bekommt man die wahre Entfernung der Punkte C und D auf dem Felde. Weil die Figur ABCD Fig. 12 der Figur ABCD auf dem Felde Fig. 13 ähnlich ist. (§. 307. f.)

§. 443. Wenn die Entfernung dreier Punkte A, B, C oder Gegenstände bekannt ist oder gegeben wird, es sei nun daß sie ein Dreieck machen wie Fig. 219, oder in gerader Linie liegen, wie Fig. 220, und man befindet sich irgendwo auf dem Felde in einem Punkt D, wo man die Gegenstände sehen kann, die Entfernung des Punkts D von den Punkten A, B, C zu finden.

1) Man messe bei D die Winkel ADC, ADB, CDB mit dem Astrolabium oder mit der Bußole, und merke sich die Grade und Minuten eines jeden.

2) Hierauf beschreibe man auf dem Papier ein Dreieck ABC, dessen Seiten AB, AC, BC nach einem angenommenen verjüngten Maasstaabe die gegebene Größe haben; nehme hierauf die Entfernungen AB, AC, BC der Gegenstände.

3) Ueber AC beſchreibe man einen Zirkel, in deſſen Umkreis der Winkel, der auf der Sehne AC ſteht, dem gegebenen Winkel ADC gleich iſt.

4) Ueber BC über einen Zirkel, in deſſen Umkreis der Winkel, der auf der Sehne BC ſteht, dem gegebenen oder gemeſſenen Winkel BDC gleich iſt. (§. 201.)

So beſtimmt der Durchſchnitt D dieſer Zirkel die Entfernungen AD, DC, BD nach dem verjüngten Maasſtabe.

Denn der Punkt D liegt ſowohl in dem Zirkel ACD als in dem Zirkel BCD, folglich da wo ſie ſich durchſchneiden.

§. 441. Es ſei z. B. AC = 327 Ruthen, BC = 171 Ruthen, AB = 366 Ruthen, der Winkel ADC = 42° 30'; BDC = 27° 30, ſo wäre

AD = 253,49 Ruthen

CD = 460,43

BD = 387,08

oder AD = 253° 4' 9''

CD = 460° 4' 3''

BD = 387°

Uebrigens müssen die Winkel ADC, DCB nicht zu klein sein, sonst entstehen Fehler, wenn die Meßinstrumente nicht sorgfältig gearbeitet sind. Es entstehen daher hier schon kleine Fehler, weil man mit dem Tansporteur die Winkel nicht so genau auftragen kann als sie durch das Instrument angegeben werden. Daher ist es rathsamer, die Entfernungen bei allen diesen Aufgaben, wo entweder die Standlinie oder wo bei dieser Aufgabe der Winkel bei D sehr klein sind, zu berechnen, welches in dem zweiten Theile gezeigt werden wird.

Der Meßtisch

erspart uns aber das Auftragen der Winkel, und daher ist er in allen Fällen, wo man eine Gegend zugleich aufnehmen will, als das beste Werkzeug zu empfehlen. Wenn man nun die Entfernung und Lage verschiedener Gegenstände auf einer Gegend bestimmen will, so überzieht man denselben mit Papier und macht darauf einen verjüngten Maasstab, der jedesmal nach der Entfernung der Hauptpunkte eingerichtet sein, das will sagen, so genommen werden muß, daß man die Gegenstände noch auf dem Meßtische zeichnen kann.

§. 442. Soll man nun die Entfernung des Punkts C von dem Punkte A und B bestimmen;

so setze man 1) den Meßtisch über den Punkt A, messe den Winkel CAB und ziehe die Schenkel desselben mit Bleistift auf das Papier auf. Fig. 221.

2)

2) Man messe ferner die Linie AB mit der Kette oder Meßschnur und trage sie auf den Meßtisch nach dem angenommenen verjüngten Maasstaabe auf, so bekömmt man den Punkt B auf dem Tische.

3) Hierauf stelle man den Meßtisch, so daß der Punkt B auf demselben gerade über dem Punkte B auf dem Felde kommt, lege das Dioptern-Lineal an die bereits gegebene Linie BA, sehe nach A zurück und drehe den Tisch so lange, bis der Punkt A in die verlängerte Linie AB fällt, oder bis derselbe von dem ausgespannten Faden in der Diopter bedeckt wird, damit der Tisch die gehörige Lage bekomme, und in dieser schraube man ihn fest.

4) Wenn dies geschehen, so richte man das Dioptern-Lineal nach C und ziehe die Linie BC, so bekommt man den Winkel ABC und der Punkt C, wo sich die Schenkel der Winkel CAB, ABC durchschneiden, bestimmt die Lage des Punktes C auf dem Felde und die Entfernung desselben von A und B, wenn man die Linien AC, BC nach dem verjüngten Maasstabe misset.

§. 443. Auf diese Art kann man die Lage der vornehmsten Punkte C, D, E, F, G ꝛc. die sich auf einer Gegend befinden und ihre Entfernung von einander bestimmen, wenn man eine Standlinie AB nimmt und auf dem Meßtische erst in A die Winkel CAB, DAB ꝛc., sodann in B die Winkel CBA, DAB ꝛc. mißt. Indeß muß man die Standlinie nicht zu klein annehmen, weil sonst Fig. 222.

die Punkte, wo sich die Schenkel der Winkel durchschneiden, ungewiß werden.

§. 444. Wenn man eine Figur auf dem Felde zu Papiere bringen will, deren äußerer Umfang durch die in den Punkten A, B, C, D, E ꝛc. befindliche Gegenstände oder durch Stäbe bestimmt wird, die man in diesen Punkten gesetzt hat oder nach und nach setzen kann, so verfährt man dabei folgendergestalt.

1) Man setzt über den Punkt A, wo man anfangen will, den Meßtisch und mißt den Winkel EAB. (§. 241.)

2) Hierauf geht man nach B und mißt zugleich die Länge der Linie AB, die man nach dem verjüngten Maaßstabe aufträgt und dadurch den Punkt B auf dem Meßtische bestimmt.

3) Den auf dem Meßtische bestimmten Punkt B bringt man gerade über den Punkt B auf dem Felde, giebt dem Tische die gehörige Lage (§. 442. n. 3) und mißt den Winkel ABC.

4) Man geht mit dem Meßtische weiter nach dem Punkte C, mißt zugleich die Linie BC und trägt sie auf das Papier.

5) In C stellt man wieder den Tisch auf, giebt ihm die gehörige Lage und mißt den Winkel BCD.

Auf diese Art geht man weiter, bis man den ganzen Umfang der Figur und alle Winkel derselben

den gefunden hat; so bekommt man offenbar eine Figur auf dem Papiere, welche der auf dem Felde ähnlich ist, wenn man sich dabei Mühe gegeben, alle Fehler sorgfältig zu vermeiden.

§. 445. Wenn man den Lauf eines Flusses MN bestimmen will, so zieht man längst demselben eine gerade Linie oder mehrere AB, BC ꝛc. und fällt von den Hauptbeugungen des Flusses auf dieselbe Perpendikulärlinien Aa, Dd, Ee ꝛc. mißt sowohl die Länge derselben als auch die Entfernung der Punkte D, E ꝛc. von A und trägt sie nach dem verjüngten Maasstabe auf den Meßtisch auf. Ist man bis B gekommen, wo die längst dem Flusse gezogenen geraden Linien einen Winkel machen, so mißt man den Winkel ABC und geht auf eben die Art bis C fort, und weiter wenn es nöthig ist. Durch die gefundenen Punkte a, d, e ꝛc. h, i, k ꝛc. zieht man alsdenn eine krumme Linie, welche den Lauf des Flusses gemeiniglich so genau bestimmt als es nöthig ist, besonders bei militärischen Karten. Fig. 224.

§. 446. Seen, Teiche, Moräste, auch Dörfer ꝛc. schließt man in Figuren ein, deren Umfang und die dabei vorkommenden Winkel man mißt und durch Hülfe der wie §. 445 gezogenen Perpendikulärlinien die dabei vorkommenden Krümmungen bestimmt.

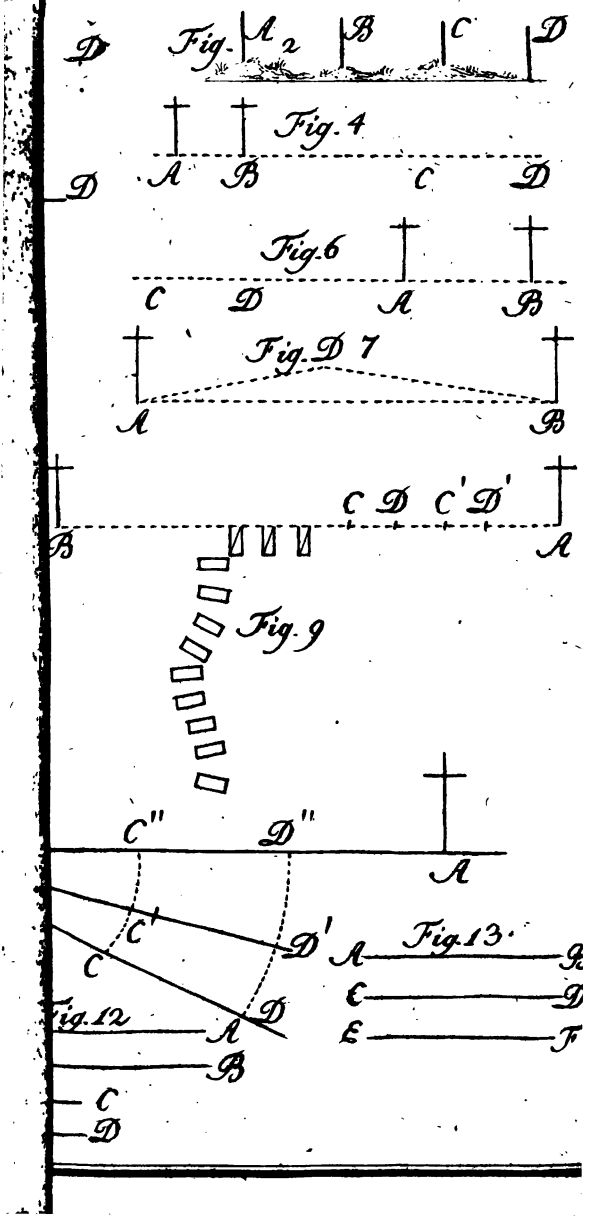
Will man nun eine Gegend aufnehmen, auf der verschiedene Gegenstände vorkommen, und kann sie als eine ebene Fläche betrachten, so suche man

man erstlich die Hauptpunkte auf derselben, nach §. 443. Hat man diese gehörig bestimmt, so nehme man die Theile der Gegend Stück vor Stück vor, suche die Lage und Größe der darauf befindlichen Seen, Moräste, Brüche, Waldungen, Dörfern, Gärten, einzelner Häuser und aller merkwürdigen Gegenstände, wozu die vorigen Aufgaben Anleitung geben, und zeichne sogleich auf dem Papiere, das auf dem Meßtische ausgespannt ist, so bekommt man ein Bild, welches der Gegend ähnlich und eine sogenannte Karte davon ist. Ist aber die Gegend gebirgig, so müssen mit dem bereits vorgetragenen Hülfsmittel noch andere verbunden werden, die aber noch eine Kenntniß von der Lehre der Flächen und Körper voraussetzen, die ich in dem zweiten Theil dieses Werks vortragen werde.

Die stehengebliebenen Druckfehler haben wegen Kürze der Zeit nicht ausgezogen werden können; sie sollen aber bei dem zweiten Theile angezeigt werden.

Nachricht für den Buchbinder.

Die Kupferabdrücke müssen gut planirt und jede Tafel an ein Oktavblatt weises Papier gekleistert werden, damit sie der Leser hervorziehen kann.


D
Fig. 2
A
B
C
D
Fig. 4
D
A
B
C
D
Fig. 6
C
D
A
B
Fig. 7
A
B
C D C' D'
B
A
Fig. 9
C''
D''
A
C'
D'
C
D
Fig. 12
A
B
C
D
Fig. 13.
A
C
E
G
D
F

man erstlich die Hauptpunkte auf derselben, nach §. 443. Hat man diese gehörig bestimmt, so nehme man die Theile der Gegend Stück vor Stück vor, suche die Lage und Größe der darauf befindlichen Seen, Moräste, Brüche, Waldungen, Dörfern, Gärten, einzelner Häuser und aller merkwürdigen Gegenstände, wozu die vorigen Aufgaben Anleitung geben, und zeichne sogleich auf dem Papiere, das auf dem Meßtische ausgespannt ist, so bekommt man ein Bild, welches der Gegend ähnlich und eine sogenannte Karte davon ist. Ist aber die Gegend gebirgig, so müssen mit dem bereits vorgetragenen Hülfsmittel noch andere verbunden werden, die aber noch eine Kenntniß von der Lehre der Flächen und Körper voraussetzen, die ich in dem zweiten Theil dieses Werks vortragen werde.

Die stehengebliebenen Druckfehler haben wegen Kürze der Zeit nicht ausgezogen werden können; sie sollen aber bei dem zweiten Theile angezeigt werden.

Nachricht für den Buchbinder.

Die Kupferabdrücke müssen gut planirt und jede Tafel an ein Oktavblatt weises Papier gekleistert werden, damit sie der Leser hervorziehen kann.

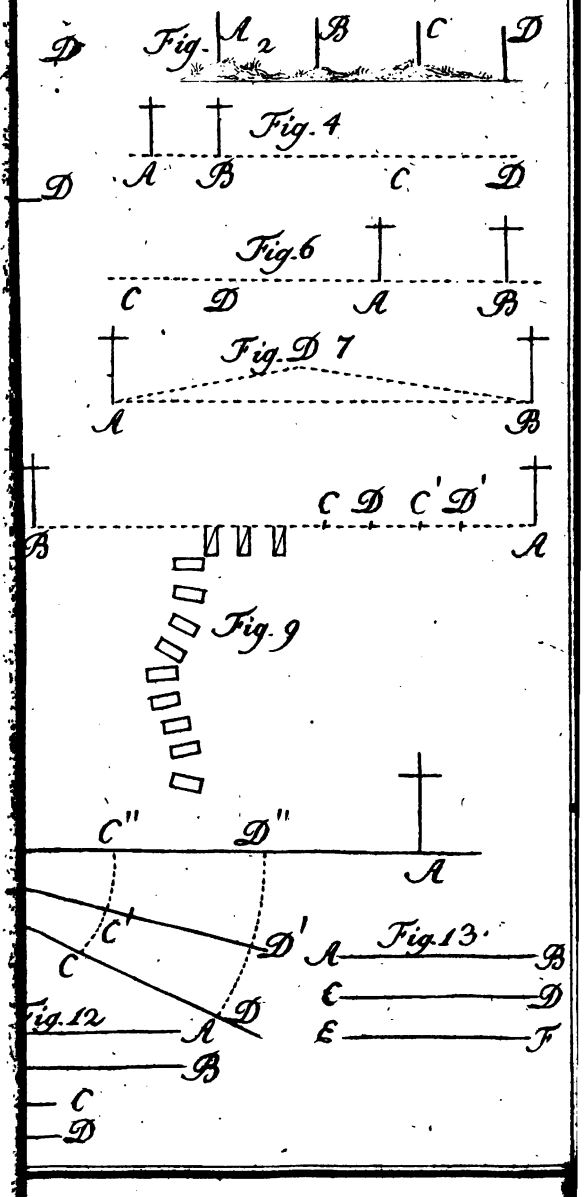


Fig. 2
A
B
C
D
Fig. 4
A
B
C
D
Fig. 6
C
D
A
B
Fig. 7
A
B
Fig. 9
C D C' D'
B
A
C''
D''
A
C'
D'
C
D
Fig. 12
A
B
C
D
Fig. 13.
A
B
C
D
E
F

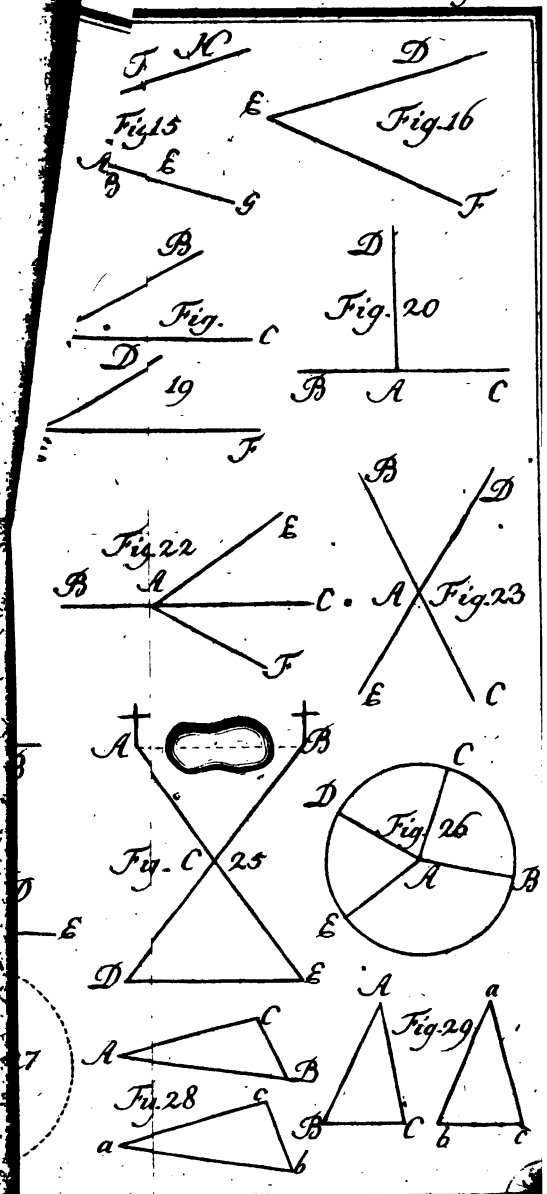
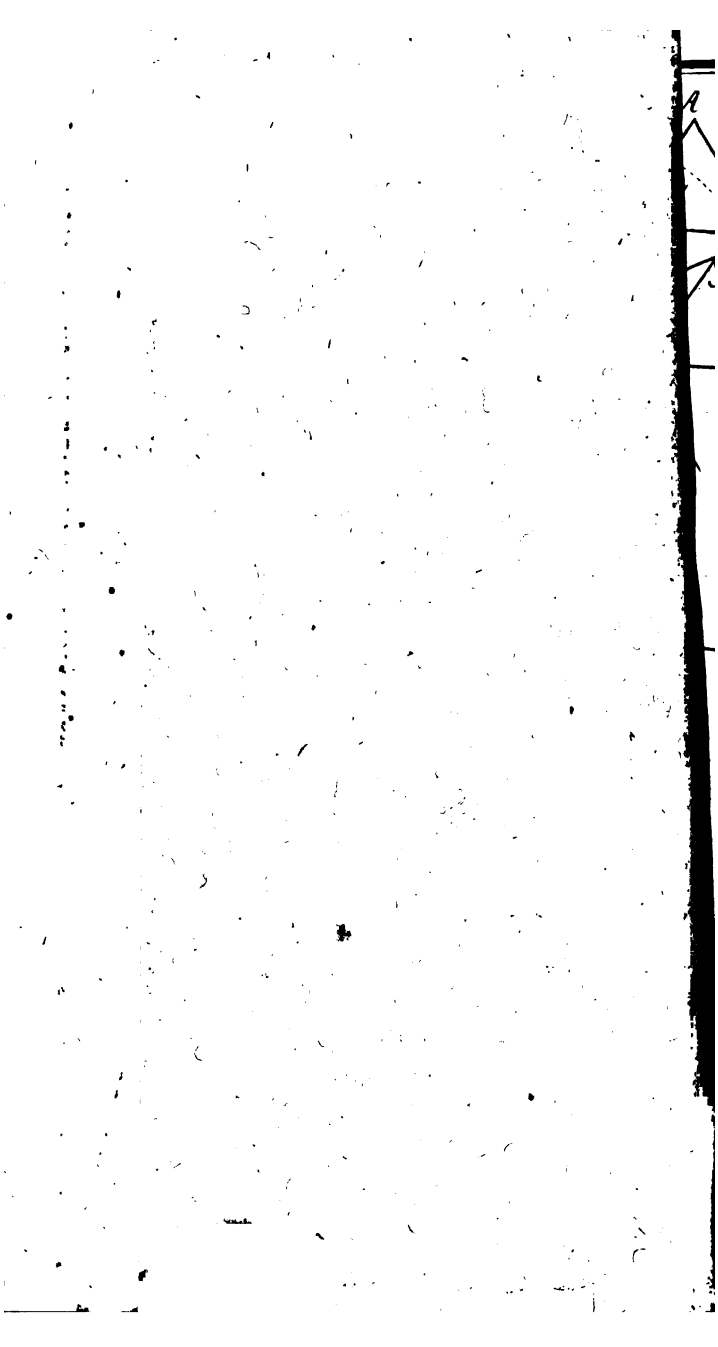
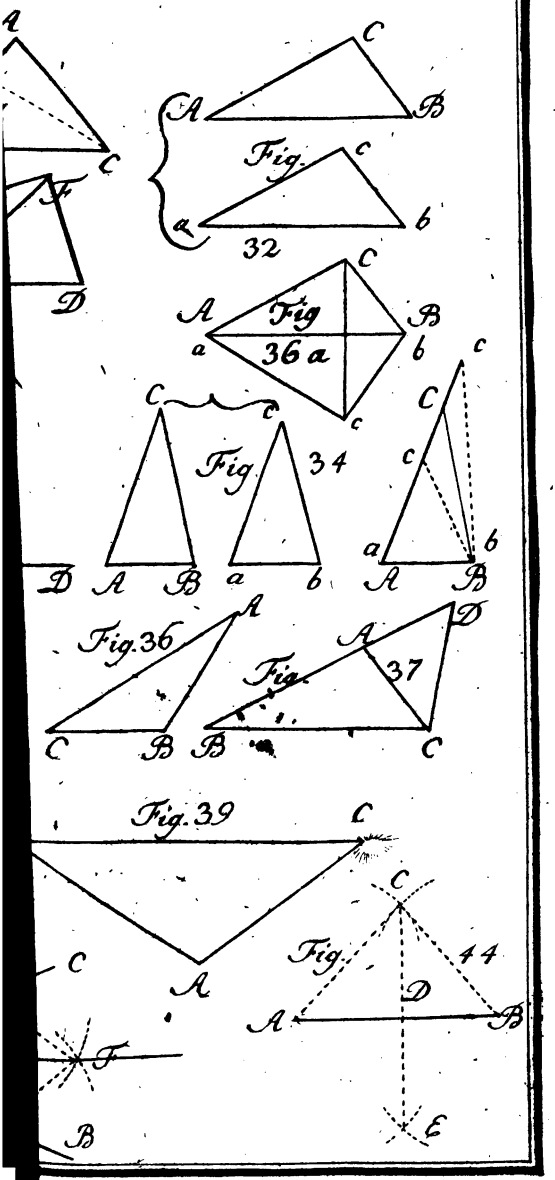
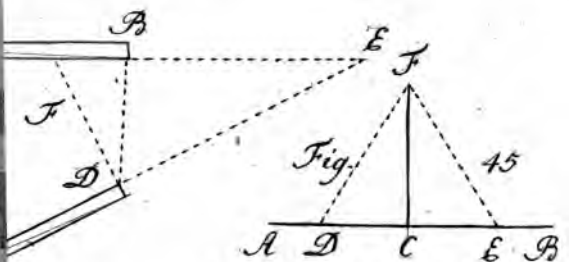
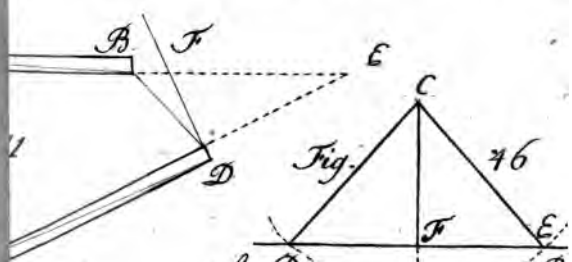


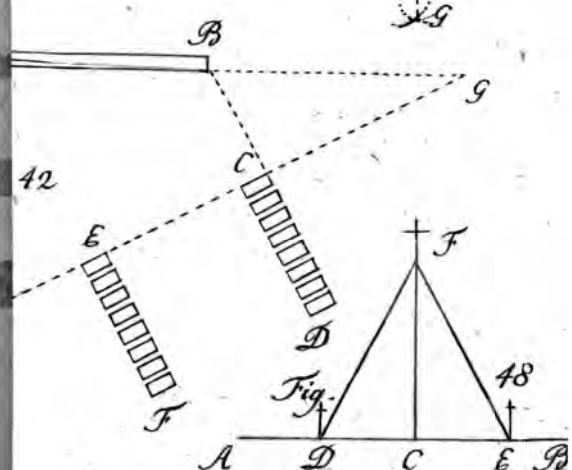
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 28
Fig. 29




A
C
C
F
D
A
B
Fig.
c
a
b
32
C
A
Fig
B
36 a
a
b
c
C
c
Fig
34
C
c
c
D
A
B
a
b
a
b
A
B
Fig. 36
A
Fig.
A
D
37
C
B
B
C
Fig. 39
C
C
A
Fig.
44
C
D
A
B
F
B
E


B
E
F
F
D
Fig.
45
A
D
C
E
B


B
F
E
C
D
Fig.
46
F
E
A
D
B
G


B
G
42
C
E
D
F
F
Fig.
48
A
D
C
E
B

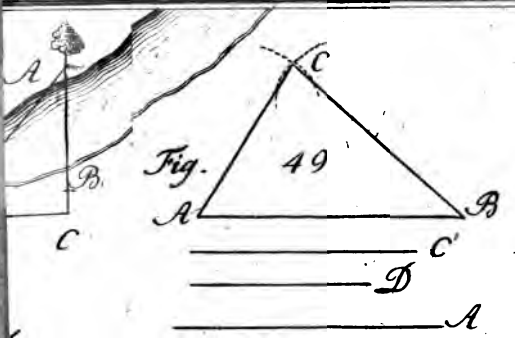


Fig. 49

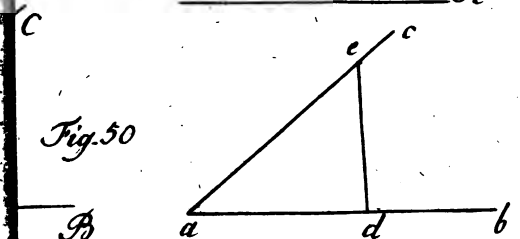


Fig. 50

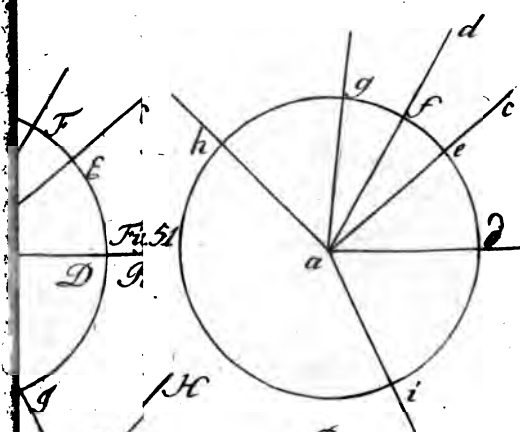
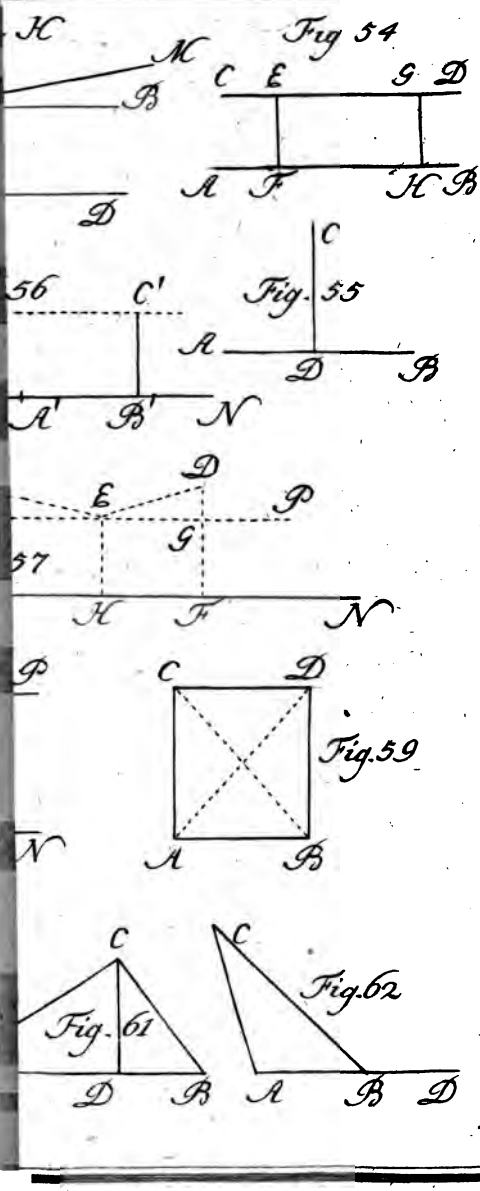


Fig. 51

Fig. 52


K
M
B
D
Fig 54
C E G D
A F K B
C
56 C'
Fig. 55
A D B
A' B' N
D
E P
G
57
K F N
P
C D
Fig.59
N
A B
C
Fig. 61
D B
C
Fig.62
A B D

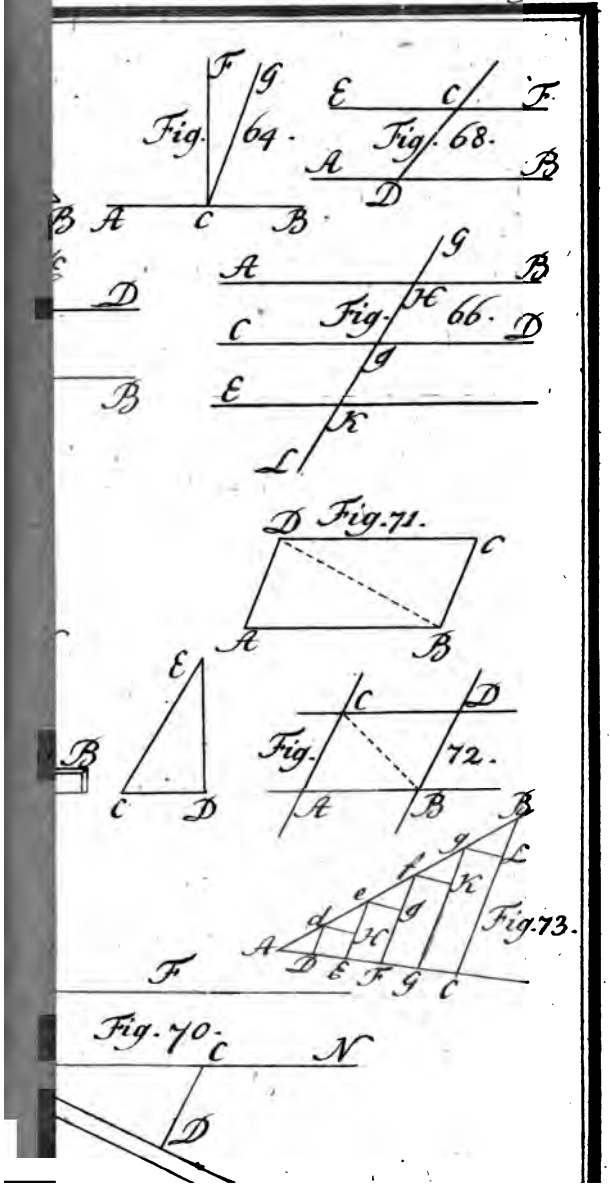
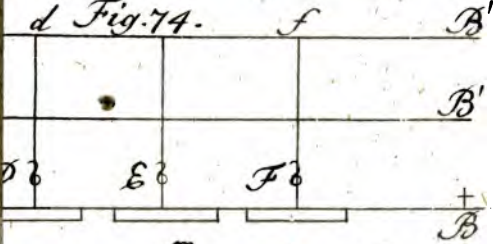
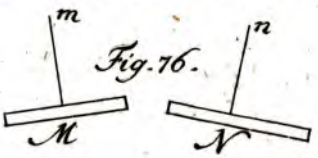
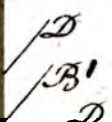
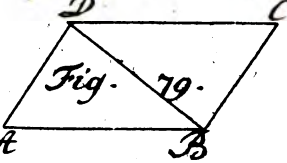


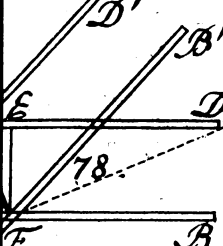
Fig. 64.
Fig. 68.
Fig. 66.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 70.

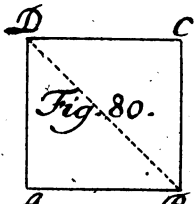

d
Fig. 74.
f
B''
B'
D
E
F
B

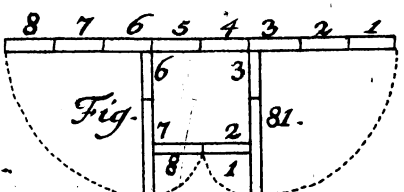

m
n
Fig. 76.
M
N


D
B'
D
B


D
C
Fig. 79.
A
B

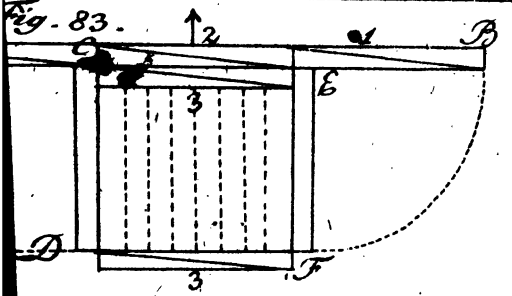

D'
B'
E
D
L
78.
F
B

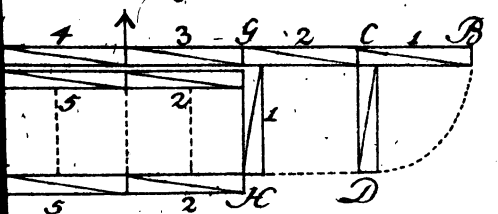

D
C
Fig. 80.
A
B


8 7 6 5 4 3 2 1
6
3
Fig.
7
2
81.
8
1

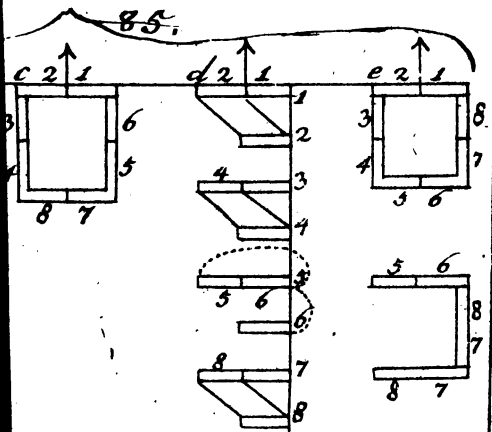
E
A
82.
D

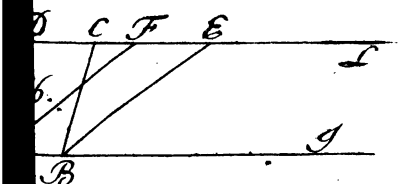
Fig. 83.

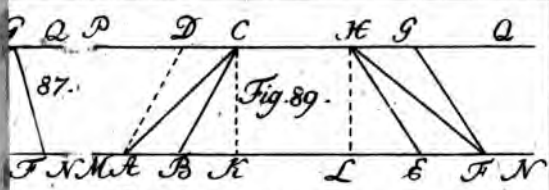

C
2
1
B
E
3
D
3
F


4
3
G
2
C
1
B
5
2
1
5
2
K
D

85.


c 2 1
d 2 1
e 2 1
6
5
8 7
1
2
4
3
4
5 6
6
8
7
3
8
4
7
5 6
5 6
8
7
8 7
8
7
8


D
C
F
E
L
G
B


87.
Fig. 89.

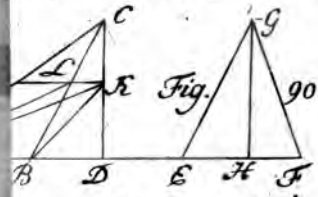
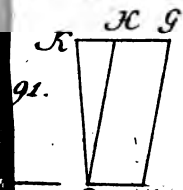


Fig.
90.


91.

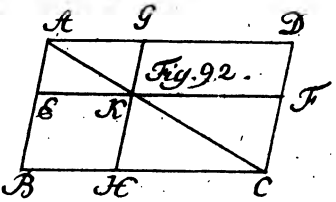
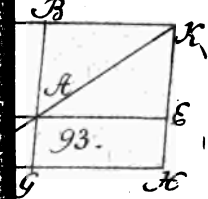


Fig. 92.


93.

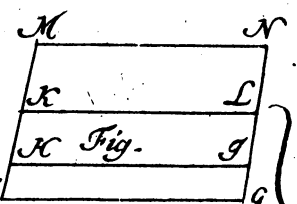
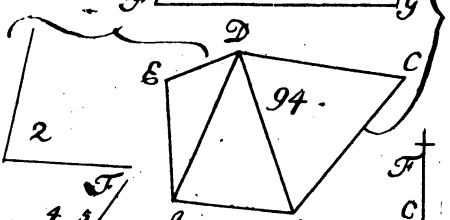


Fig.


2
94.

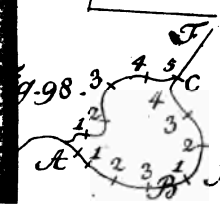


Fig. 98.

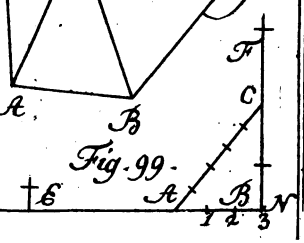
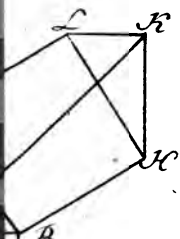


Fig. 99.



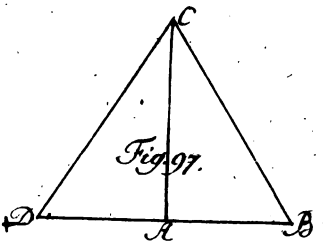


Fig. 97.

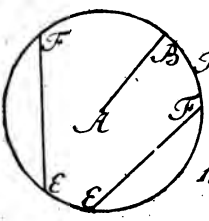
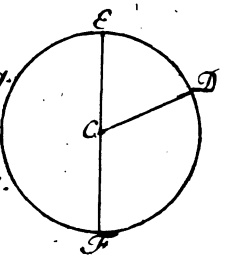


Fig. 101.



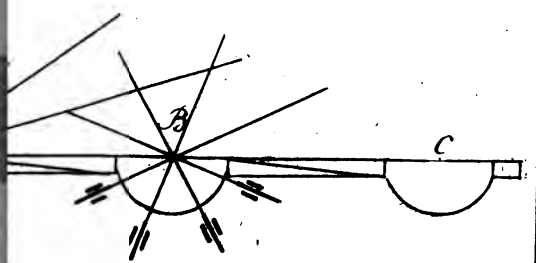
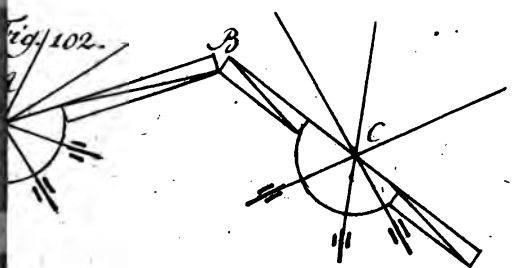
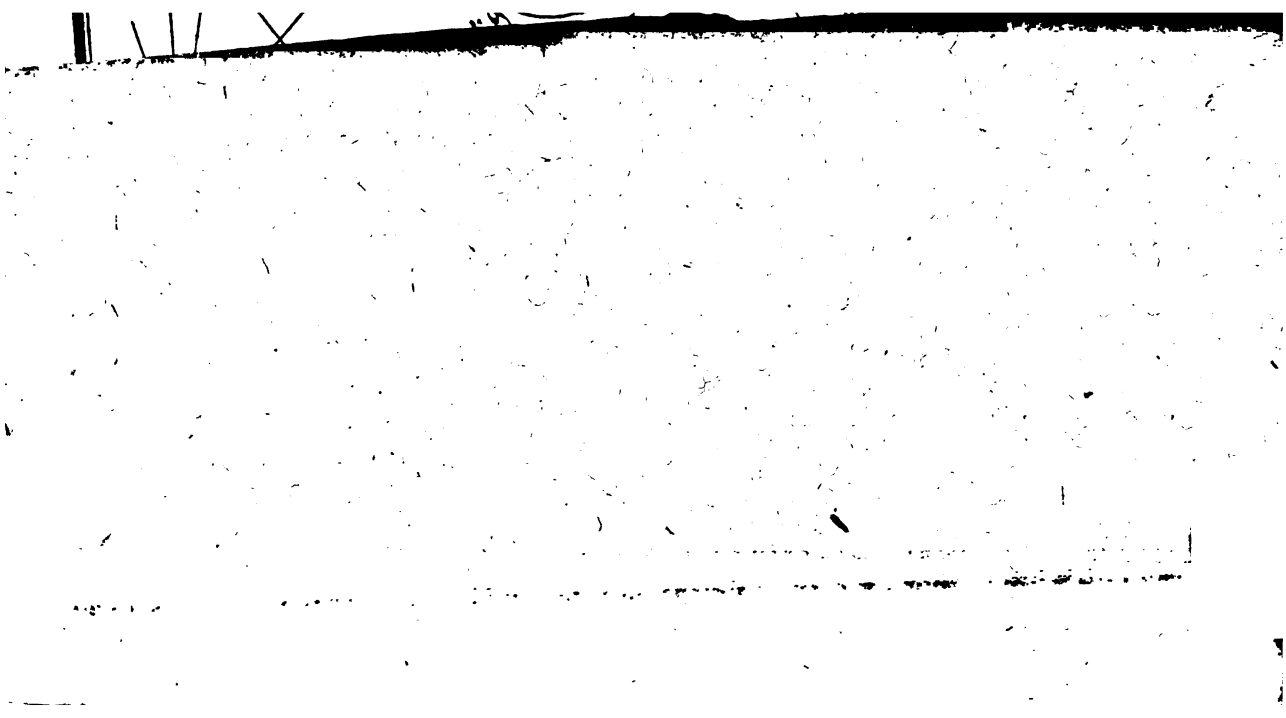


Fig. 102.





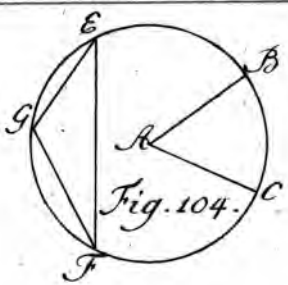


Fig. 104.

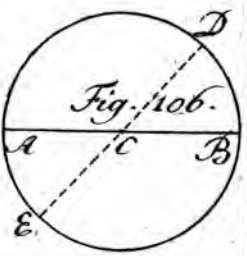


Fig. 106.

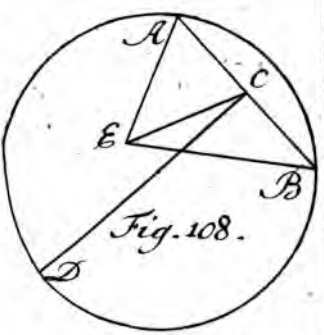
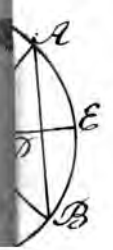


Fig. 108.



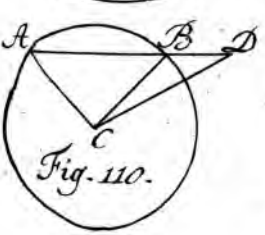


Fig. 110.

Fig. 112
A
D
F
B
C
G
E
D
D
G
E
A
C
Fig. 113
F
B
D
F
Fig. 114
E
G
D
L
K
H
C
B
L
D
F
A
D
C
E
Fig. 117
B
F
B
A
C
D
Fig. 118

Fig. 120

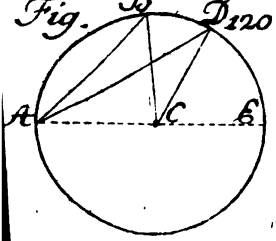


Fig. 121

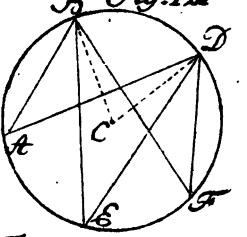


Fig. 122

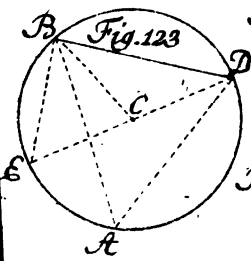
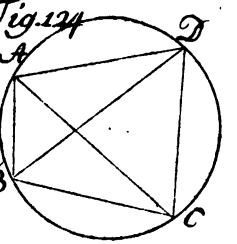
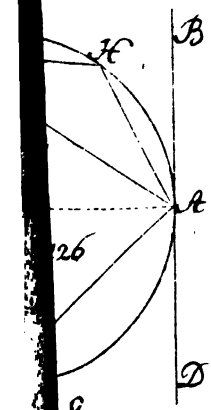


Fig. 124





126

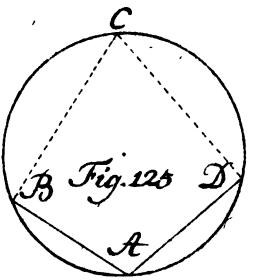


Fig. 125

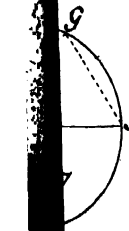
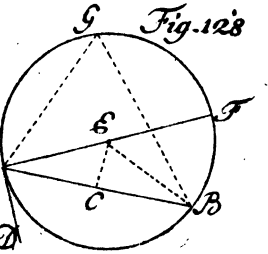


Fig. 128



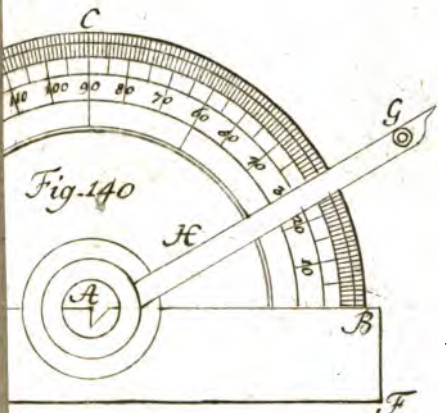


Fig. 140

P

Fig. 129

30

g. 131

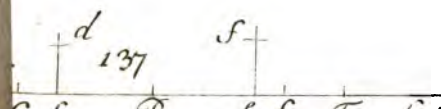
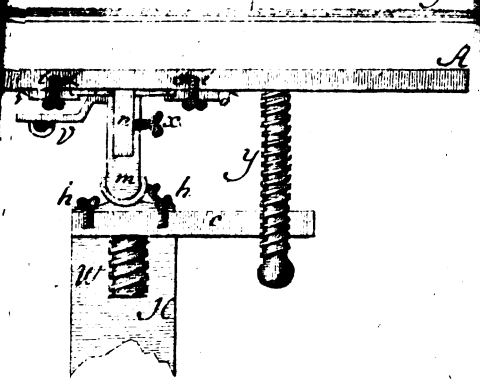


Fig. 151



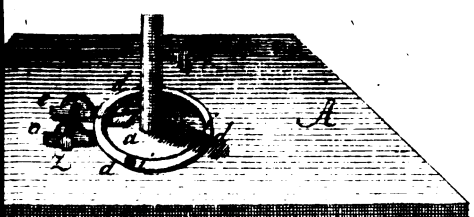
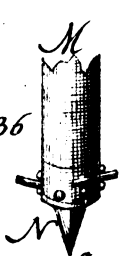


Fig. 133

Fig. 134



136

Fig. 135

Fig. 132

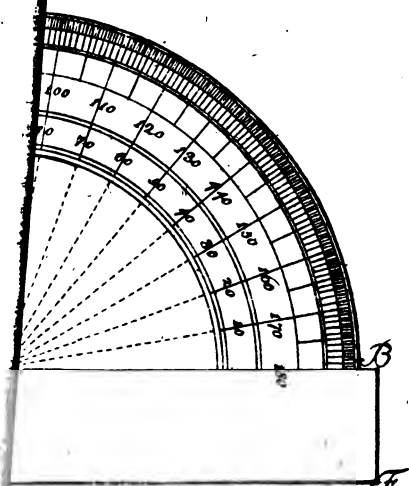
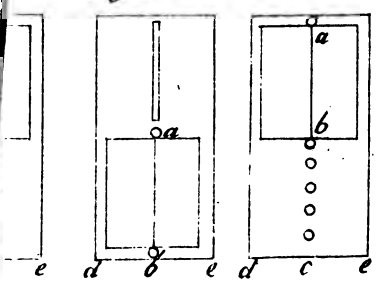


Fig. 142



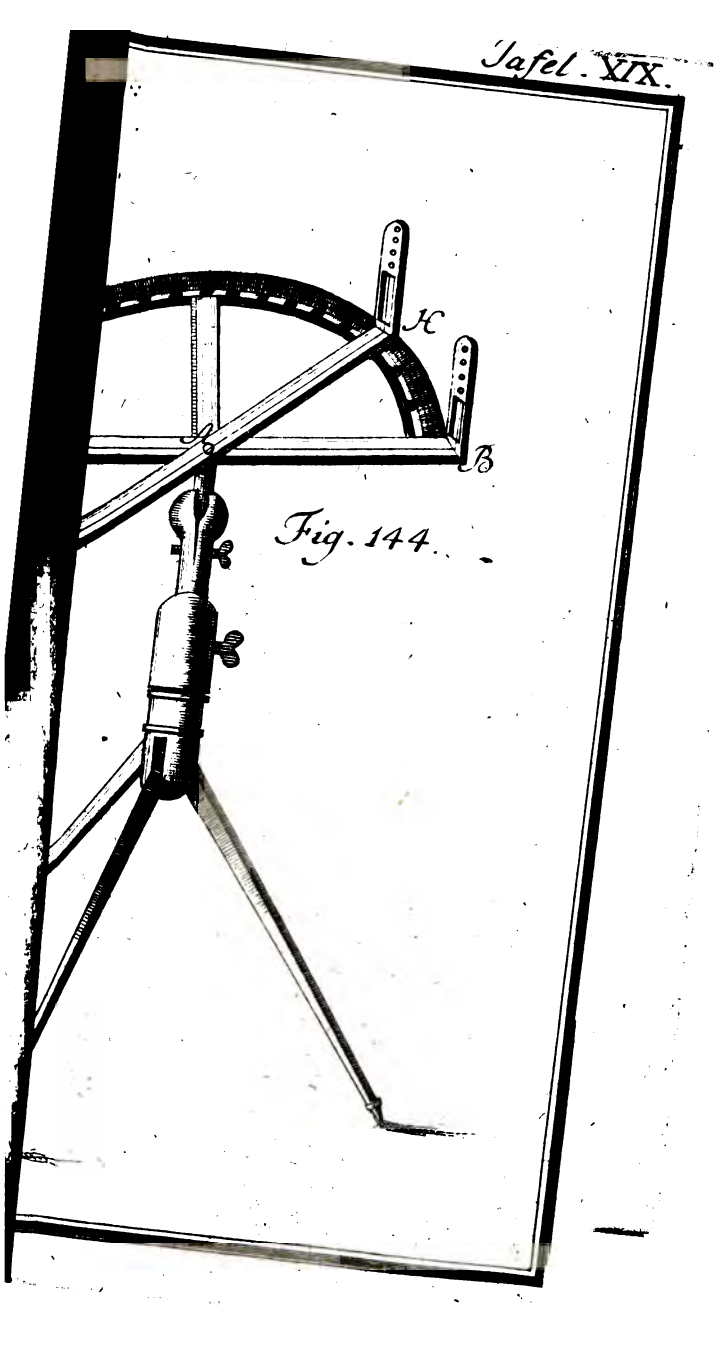


Fig. 144.

Fig. 145.

Fig. 146

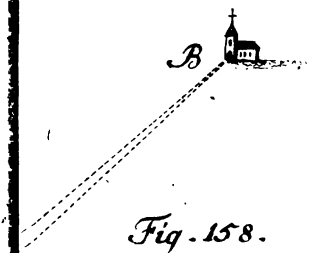
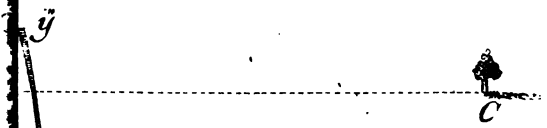


Fig. 158.



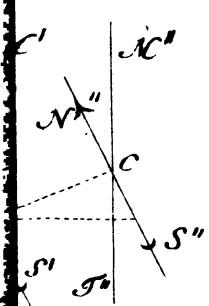
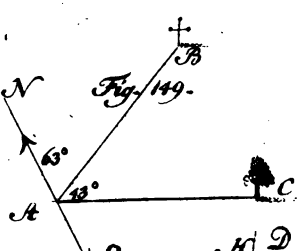
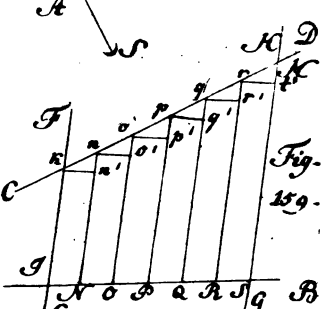


Fig. 150.





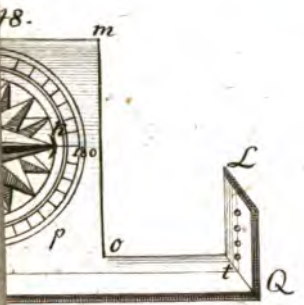
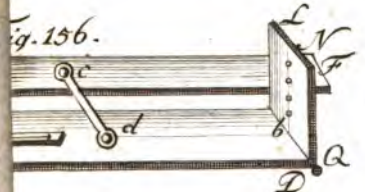


Fig. 156.



157.

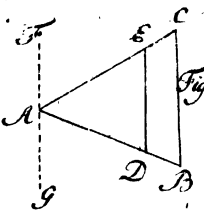


Fig. 161.

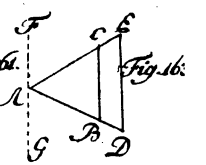


Fig. 16

Fig. 162.

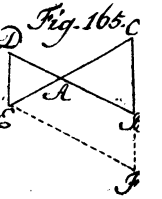
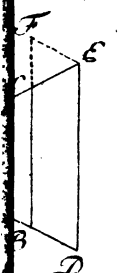


Fig. 165.

164.



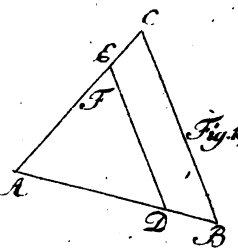


Fig. 167.

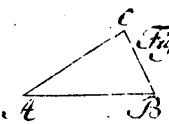


Fig. 169.

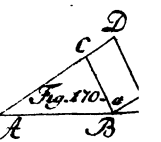
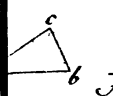


Fig. 170.



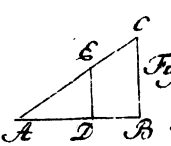
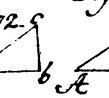


Fig. 172.



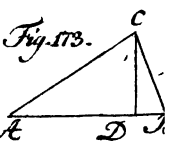


Fig. 173.

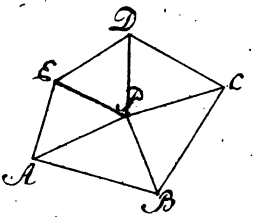
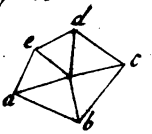
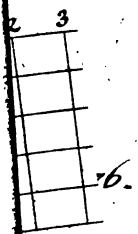
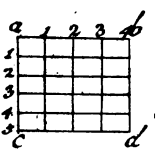


Fig. 175.







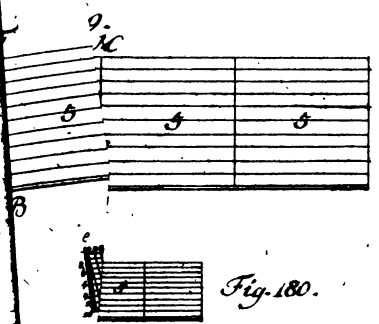
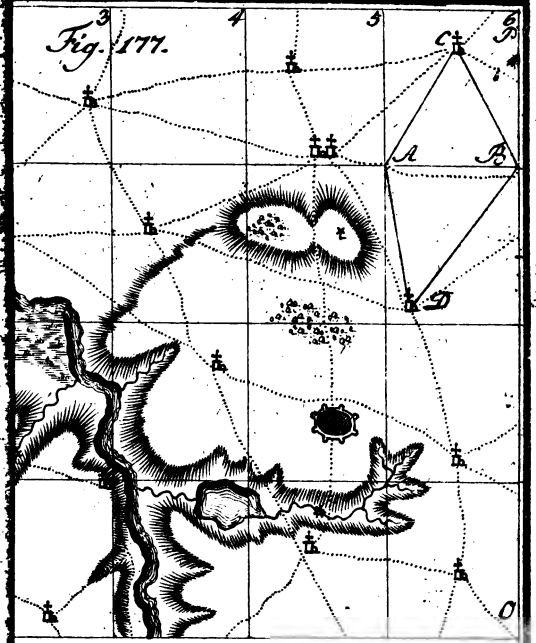
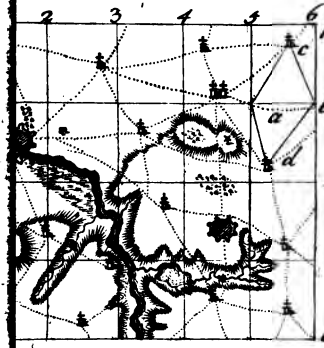


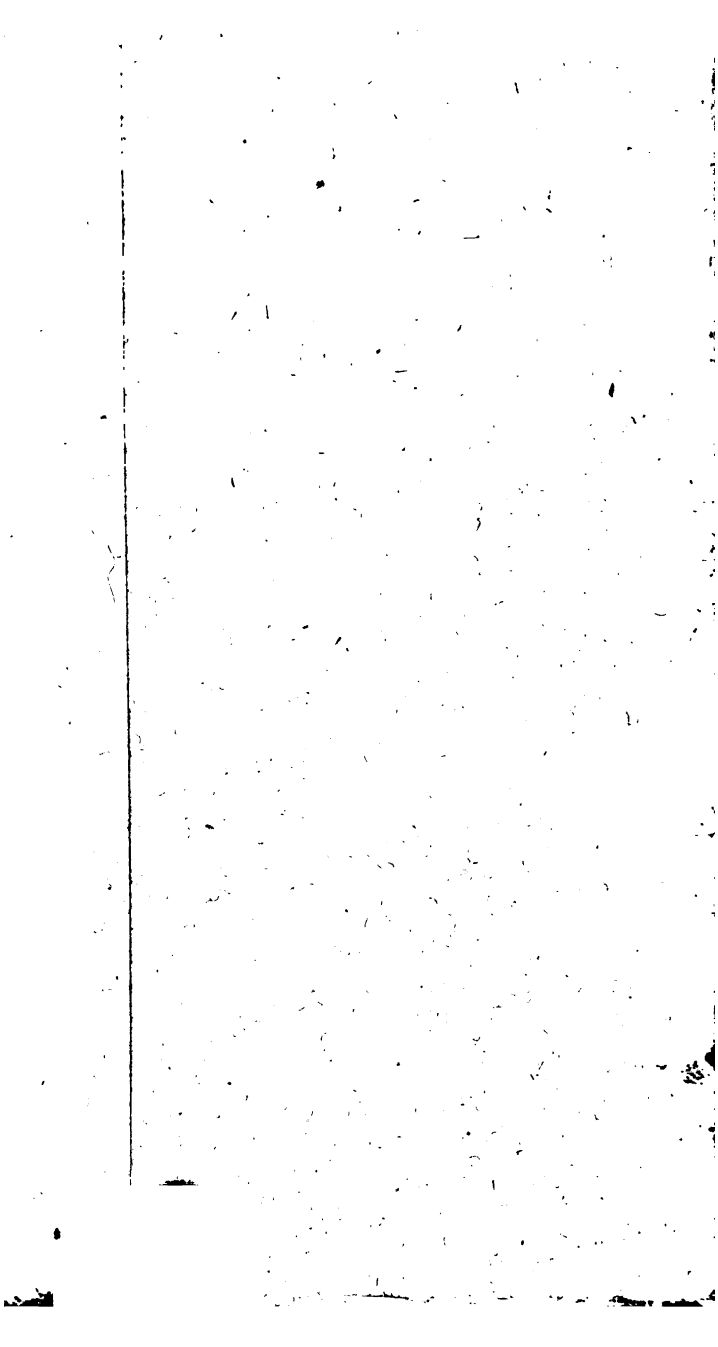
Fig. 180.

Fig. 177.





178.



181.

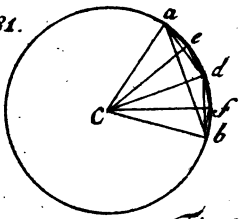


Fig. 182.

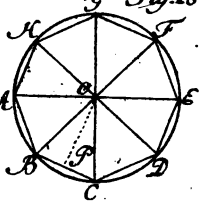
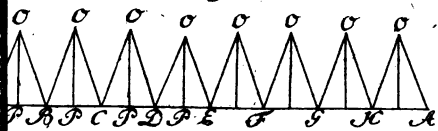


Fig. 184.



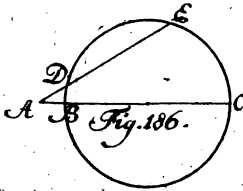


Fig. 186.

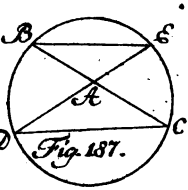


Fig. 187.

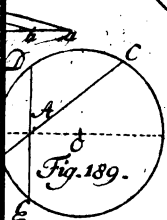


Fig. 189.

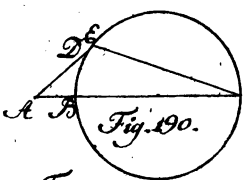
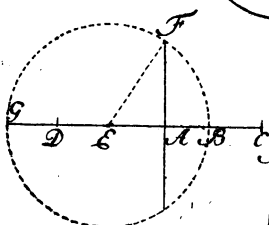
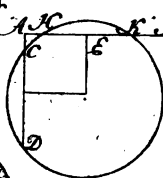


Fig. 190.





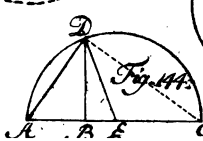
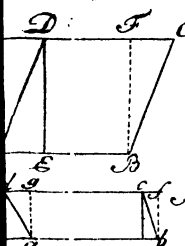


Fig. 144.



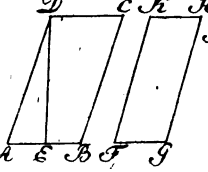
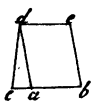
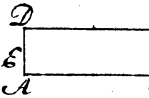


Fig. 197.





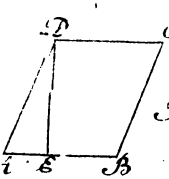
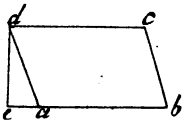
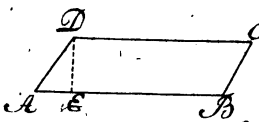


Fig. 198.





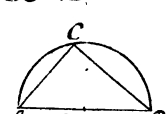
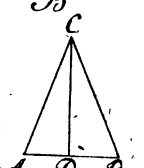


Fig. 201.



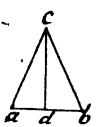


Fig. 202.

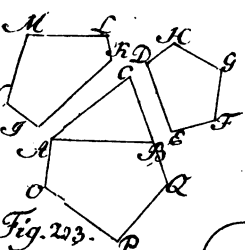
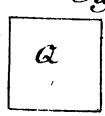
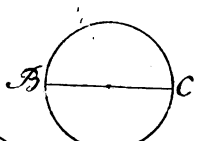


Fig. 203.





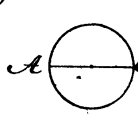


Fig. 204.

Fig. 206.

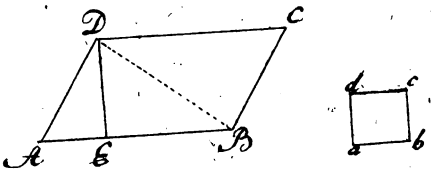


Fig. 208.

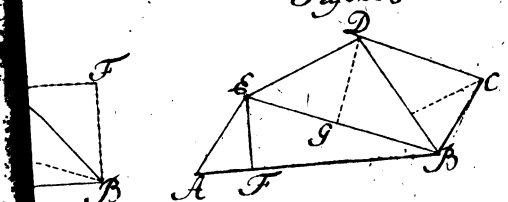
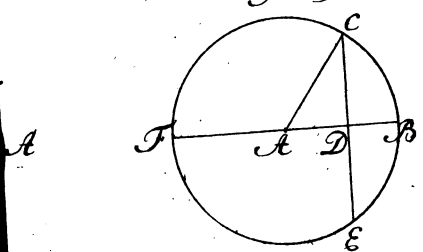


Fig. 209.



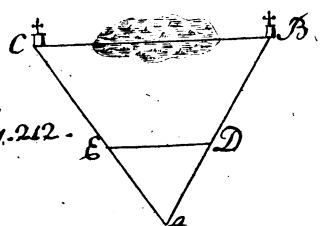
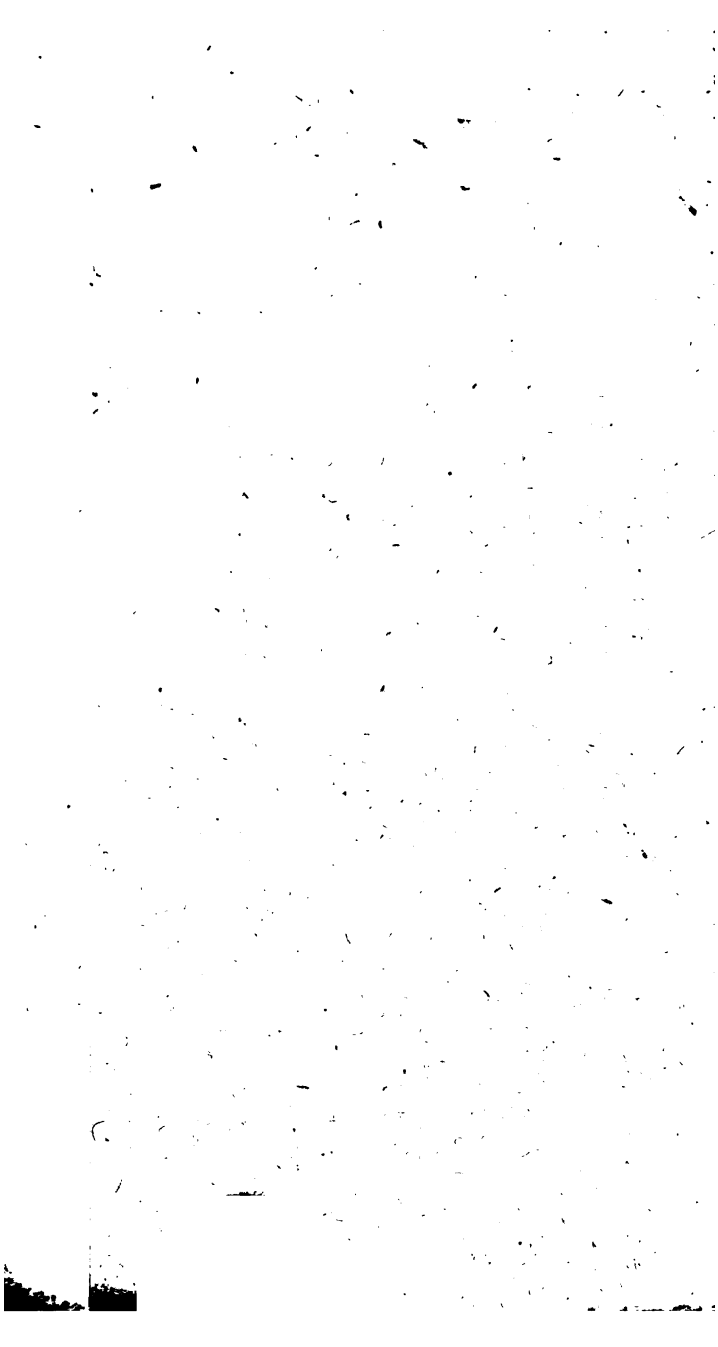



Fig. 212.